هدية من المؤلف الى سعادة احمد بك
زهني ناظر مدرسة المهندسخانة الخديوية

S. Sabry

# كتاب بلوغ الآمال

## في المنحنيات الكثيرة الاستعمال

تاليف


صابر افندي صبري

مدرس فرع الوصفيات

بمدرسة المهندسخانه

الخديويه


قد قرر مجلس المعارف الاعلا في جلسة ٢٥ ابريل سنة ١٨٨٢ افرنكيه
لزوم استعمال هذا الكتاب بالمدارس الاميريه
المصريه




الطبعة الاولى

بمطبعة ديوان عموم المعارف بسراى درب الجماميز

سنة ١٢٩٩ هجريه

على صاحبها افضل الصلاة

وازكى التحيه

م



بسم الله الرحمن الرحيم

حمدا لا نهاية له لمن بحكمته اهتدينا الى الطريق المعتدل القويم وشكرا دائما لمن خص النوع الانسانى بالعقل ليعرف كنه قدرته ويستقيم فسبحانه من اله أتقن صنع العالم بعظيم قدرته اتقانا ورتبه على ما اقتضته حكمته ترتيبا محكما لا يعرف قدره الا كل ذى بصيرة ممن ملأ الله قلوبهم ايمانا فجعل الشمس والقمر والنجوم تجرى فى مداراتها المنحنية بانتظام وكلفها بان تتبع فى سيرها قوانين ثابتة قوية الاحكام لا الشمس ينبغى لها ان تدرك القمر ولا الليل سابق النهار وكل فى فلك يسبحون وصلاة وسلاما مستقيمين متوازيين ممتدين لا يقطعهما مدى الزمان قاطع فهما غير منتهيين على مركز محيط الدائرة الاسلامية مسقط الوحى ومهبط الرسالة الربانية سيدنا محمد القاطع بسيف برهانه كل من يطعن لشيء من ايات تبيانه وعلى آله واصحابه المساعدين له على تأييد دعائم الدين واسقاط رؤس اعدائه المشركين وبعد فيقول الراجى العفو عن كل ما يزرى عبده صابر صبرى مدرس علم الهندسة الوصفية وفروعه التطبيقية بمدرسة المهندسخانة الخديوية المصرية هذه رسالة ابتدائية فى المنحنيات الكثيرة الاستعمال قد كلفنى بجمعها من لا يسعنى مقابلة أمره الا بالامتثال ذو السيرة المرضية والشهرة

التى

التي يعجز عن وصفها سحبان الفصاحه حضرة العالم الشهير اسماعيل بك الفلكي
ناظر مدرسة المهندسخانه والمساحه على شرط ان تكون سهلة العبارات والبراهين
لا تتوقف اثباتاتها الا على الهندسة العادية وما في الجبر الواطي من القوانين
ليتاتى استعمالها بمدرسة المساحه والمدارس التجهيزيه وينتفع بها بنو الديار
المصريه في ظل هذا الخديو الاعظم والداوري الافخم لا زالت البلاد ممتعة ببقائه
وانجاله ولا زال محفوفا بالنصر بجاه سيدنا محمد وآله ولما اشرفت على التمام
وتحلت بحلية الختام سميتها بلوغ الآمال في المنحنيات الكثيرة الاستعمال راجيا
من المولى الغفور أن يقرنها بالقبول لدى الجمهور لنفوز برضاء أولياء الأمور
انه على كل شئ قدير وبالاجابة جدير وهذا اوان الشروع في المقصود

# الباب الاول

## في المقدمات وفيه فصول

# الفصل الاول

## في المبادى والتعاريف الاوليه

س ١ قد علم من الهندسة العادية أن كلمة خط كلمة عموميه تشمل الخط المستقيم
والخط المنحني بجميع أنواعه لان لفظة خط تطلق على المسار الهندسي لنقطة تتحرك
في الفراغ بكيفية وشروط معلومة مهما كانت تلك الكيفية وهذه الشروط
مثلا اذا تحركت نقطة في الفراغ واتجهت الى جهة معينة بشرط ان لا يتغير اتجاهها
أبدا كان المسار الهندسي الذي ترسمه هذه النقطة خطا مستقيما
واما اذا تحركت النقطة في الفراغ وتغير اتجاه سيرها في كل لحظة كان المسار الهندسي لها
خطا منحنيا شكله وهيئته تابعان لكيفية وشروط حركة النقطة المذكورة

س ٢ فيعلم مما تقدم حينئذ أن المنحني هو
الخط الحادث من تحرك نقطة هندسية
بحيث يتغير اتجاه سيرها على الدوام

شكل ١

ا ء ب ح

وذلك كالخط ا ب حـ ء (شكل ١)

ولاجل فهم الطالب معنى هذا التعريف نقربه بمثال فنقول اذا فرض ان صيادا كان
واقفا فى نقطة ا (شكل ٢)
وكان معه فى الصيد كلب واقف
على بعد منه فى نقطة مثل حـ ثم اراد
الكلب أن يلحق بصاحبه ويتوجه
الى نقطة مقره وهى ا فانتقل

شكل ٢

الصياد من مكانه واتجه فى الطريق المستقيم ا ب قاصدا الذهاب الى نقطة ب
فبالضرورة يعلم ان الكلب فى مبدا الأمر يقصد السير فى اتجاه المستقيم حـ ا الواصل
بين نقطة وقوفه ونقطة وقوف صاحبه فيسير فى هذا الاتجاه برهة صغيرة لكنه
متى وجد صاحبه انتقل من موضعه الى موضع آخر التزم الكلب بأن يغير اتجاه سيره
الابتدائى ويتجه نحو الموضع الذى وصل اليه صاحبه بحيث اذا اتخذ الصياد
موضعا ثالثا تغير اتجاه سير الكلب مرة اخرى وهكذا
بمعنى انه اذا اتخذ الصياد أوضاعا متتالية مثل ا ، اَ ، اً ، اٌ ، ....... الخ
التزم الكلب أن يسير على التوالى فى اتجاه المستقيمات حـ ا ، حـ اَ ، حـ اً ، حـ اٌ
، ....... الخ لكن متى كان الصياد مستمرا فى السير بعد خروجه من نقطة ا
واتجاهه نحو نقطة ب فلا شك أن الكلب يغير اتجاه سيره فى كل لحظة لان مطمح
نظره هو الوصول الى صاحبه فى أى نقطة يجده فيها واذن يكون مسار الكلب خطا
منحنيا وقد يعرف المنحنى أحيانا بأنه هو النهاية التى يؤول اليها الخط المنكسر عند
ما تأخذ أضلاعه وزواياه الخارجة فى القلة والصغر الى ما لا نهاية ولذا يعتبر
محيط الدائرة نهاية لأى مضلع منتظم مرسوم داخلها وسطحها نهاية لسطح ذلك المضلع
س ٣ ـ جميع المنحنيات الممكن تصورها تنقسم الى قسمين عظيمين تحت كل قسم منهما
أنواع متعددة من المنحنيات وهذان القسمان هما المنحنيات المستوية والمنحنيات
المضاعفة الانحنا وتسمى أيضا المنحنيات الشمالية
س ٤ ـ فالمنحنى المستوى هو ما كانت جميع نقطه موجودة فى مستو واحد وذلك
كمحيط الدائرة مثلا وجميع ما يماثله من المنحنيات التى لا تخرج نقطها عن مستو واحد
وأما المنحنى المضاعف الانحنا اى الشمالى فهو عكس الاول أعنى ما لا تكون جميع
نقطه

نقطه في مستو واحد وذلك كما اذا التوى سلك رفيع من المعدن التواءً حيثما اتفق
بحيث اذا وضع فوق السطح المستوي فلا يتكئ عليه الا بالبعض من نقطه حالة
كون معظم السلك خارجاً عن المستوي المذكور

س د وتنقسم المنحنيات المستوية الى قسمين وهما المنحنيات المحدبة والمنحنيات الغير
محدبه فالمنحني المحدب هو الذى لا يقطعه المستقيم فى اكثر من نقطتين وذلك كمحيط
الدائرة مثلاً لانه مثبوت في الهندسة
العاديه ان المستقيم لا يقطعه الا فى نقطتين
وكالمنحنى ا ب ح ء (شكل ٣) أيضا
اذ أن المستقيم هـ هَ الموضوع حيثما اتفق لا يقطعه الا في نقطتي ب و ح لا غير

وأما المنحنى الغير محدب فهو الذى يقطعه
المستقيم فى اكثر من نقطتين وذلك كالمنحنى
المبين فى (شكل ٤) الذى يقطعه المستقيم
هـ هَ فى النقط ب و ح و ء و ع و ..... الخ

س ٦ د قطر المنحنى هو المستقيم المنصف لجميع أوتار ذلك المنحنى الموازية لاتجاه
معلوم وذلك كالقطر ب بَ فى المنحنى
ا ب اَ بَ (شكل ٥) لانه منصف للاوتار
ءاَ و هـ هَ و و وَ و ..... الخ المتوازية
وموازية لاتجاه معلوم وهذا الاتجاه
يسمى الاتجاه المزاوج للقطر ب بَ

س ٧ د واما محور المنحنى فهو المستقيم المنصف للأوتار المتوازية التي اتجاهها مزاوج
له حالة كونه عموديا عليها وذلك كالمحور ا اَ (شكل ٥) المنصف للاوتار
ء ءً و هـ هً و ... الخ التى اتجاهها مزاوج له وهو عمودى عليها
ويعلم من ذلك أن كل محور من محاور المنحنى قطر له وليس كل قطر محورا وان كل محور
من محاور المنحنى يقسمه الى قسمين متماثلين
وكذلك ينتج مما تقدم أن كل قطر من أقطار الدائرة محور لها

س ٨ د راس المنحنى هى نقطة تقابل المنحنى بأي محور من محاوره فعلى ذلك تكون
نقطتا ا و اَ (شكل ٥) راسين من رؤس المنحنى ا ب اَ بَ وقد يكون للمنحنى

الواحد رأس واحدة أو اثنتان أو أكثر من ذلك

وحيث تقدم أن كل قطر من أقطار الدائرة يعتبر محوراً لها فكذلك تعتبر أي نقطة من محيط الدائرة رأساً له (أي للمحيط) وبناءً على ذلك يكون لمحيط الدائرة رؤس بقدر ما فيه من النقط

س ٩ مركز المنحني هو النقطة التي تكون جميع نقط المنحني متماثلة الوضع بالنسبة لها يعني أن نقط المنحني المذكور موضوعة مثنى على مستقيمات مارة بنقطة المركز ومتساوية البعد عنها فمركز المنحني اب أَبَ (شكل ٥) مثلاً هو نقطة حـ

وينتج من ذلك أن كل مستقيم مار بمركز أي منحن ومنتهي الطرفين بهذا المنحني يكون منصفاً بالمركز

ويفهم مما تقدم أن جميع أقطار المنحني تمر بمركزه

س ١٠ مماس المنحني هو الوضع النهائي الذي يأخذه أي قاطع من قواطع ذلك المنحني عند اتحاد نقطتين من نقط تقاطعه مع المنحني ببعضهما وصيرورتهما نقطة واحدة

مثلاً اذا فرض منحن محدب كالمنحني اب ء بَ أَ

شكل ٦

(شكل ٦) فكل مستقيم كالمستقيم اأَ لا تقطعه بمقتضى س ٥ إلا في نقطتين كنقطتي ا وأَ

فاذا توهمنا أن المستقيم اأَ يتحرك بالتوازي لنفسه آخذاً الأوضاع اأَ , ب بَ , هـ هَ ... الخ

رأينا أن نقطتي تقاطع أوضاعه المتتالية تقربان من بعضهما شيئاً فشيئاً حتى إذا أخذ المستقيم القاطع وضعاً نهائياً كالوضع حـ ء حَ اتحدت نقطتا التقاطع وصارتا نقطة واحدة كالنقطة ء ففي هذا الوضع النهائي لا يقال للمستقيم حـ حَ قاطع المنحني بل يقال له مماس له في نقطة ء التي يطلق عليها إذ ذاك اسم نقطة التماس

هذا ولكونه مفروضاً أن المنحني اب هـ ء هَ بَ أَ محدب فبالضرورة لا يكون لأي قاطع كالقاطع اأَ أو ب بَ أو ... الخ نقط مشتركة بينه وبين ذلك المنحني سوى نقطتين اثنتين بحيث متى صار القاطع مماساً واتحدت نقطتا التقاطع المذكورتان وصارتا نقطة واحدة ظهر أن المماس لمنحن محدب لم يشترك معه إلا في نقطة واحدة وهي نقطة التماس فقط وأن المنحني يكون موجوداً بكامله في جهة واحدة من المماس وهذه الخاصية لا توجد إلا في المنحنيات المحدبة فقط ويمكن

جعلها

جعلها تعريفا لها بأن يقال

المنحني المحدب هو ما كان موجودا بأكمله في جهة واحدة من أي مماس فرض له

أما اذا كان المنحني المعلوم منحنيا غير محدب كالمنحني المبين في (شكل ٧) بمعنى أن القاطع له مشترك معه في أكثر من نقطتين فانه عندما يصير هذا القاطع مماسا للمنحني المذكور تتحد نقطتان من نقط التقاطع وتصيران نقطة واحدة

شكل ٧



وأما نقط التقاطع الباقية فلا تتحد معها بالضرورة وبناء على ذلك يرى أنه قد يكون المستقيم مماسا للمنحني محدب في نقطة حالة كونه قاطعا له في نقطة أخرى وذلك كالمستقيم ا ا فانه مماس للمنحني في نقطة ب وقاطع له في نقط حـ ء هـ ... الخ

سالـد اذا كان المنحني ذا أقطار فيكون لمماسه بعض خواص تساعد على رسم ذلك المماس وحينئذ يلزمنا ان نشرح هذه الخواص لنستعين بها عند لزومها فنقول

## نظرية أولى

المستقيم المماس لمنحن من المنحنيات ذوات الاقطار يكون موازيا لجميع الاوتار التي تجاهها مزاوج للقطر المار بنقطة التماس

شكل ٨



ولاجل البرهنة على ذلك نفرض أن المستقيم ب ا مثلا (شكل ٨) هو أحد أقطار المنحني المعلوم س ب سَ وأن المستقيم حـ ء هو الوتر المزاوج لهذا القطر فبمقتضى ما تقدم يكون هذا الوتر منصفا بالقطر المذكور في نقطة مثل هـ فاذا حرك هذا الوتر بالتوازي لنفسه بشرط ان تقرب نقطتا تقابله بالمنحني من بعضهما شيأ فشيأ كانت بالضرورة نقطة تقابله بالقطر منتصفا له مهما أخذ من الاوضاع بمعنى أن النقط هـ هَ هً ... الخ تكون في أوساط الاوتار حـ ء حَ ءَ حً ءً ... الخ

ومن ذلك يرى أنه عندما يأخذ الوتر المتحرك وضعه النهائي أعني عندما تتحد

نقطتا التقابل مع بعضهما يلزم أن تتحد معهما نقطة هـ الموجودة دائما في منتصف ذلك الوتر المتحرك فتصير الثلاث نقط المذكورة نقطة واحدة ومن ذلك يرى أيضا أن نقطة التماس تكون هي نهاية القطر أعني نقطة ب

وينتج من هذه النظرية أن المستقيم المماس لأي منحن في احد رؤسه يكون عموديا على محوره المار بتلك الرأس

ولذا ان المماس لمحيط الدائرة في أي نقطة منه يكون عموديا على قطره المار بنقطة التماس

## نظرية ثانية

س١٣ك اذا وجد مستقيمان مماسان لمنحن معلوم فأقول ان الوتر الواصل بين نقطتي تماسهما يكون مزاوجا للقطر المار بنقطة تقاطع هذين المماسين

ولاثبات ذلك نفرض أن مستقيمي حء ، حَءَ وتران من أوتار المنحنى س ا سَ (شكل ٩) وأن المستقيم ا ب هو قطره المزاوج لهما ثم نصل الوترين ححَ ، ءءَ ونمدهما على استقامتيهما حتى يتقاطعا في نقطة ولتكن م مثلا فأقول ان نقطة م يلزم أن تكون موجودة على امتداد القطر ا ب لأن

شكل ٩

نسبة حهـ : حَهـَ :: ءهـ : ءَهـَ

وحيث ان هذه الخاصية لا تزال توجد مهما قرب الوتران حء ، حَءَ من بعضهما فتوجد أيضا في الحالة النهائية أعني عند اتحاد هذين المستقيمين مع بعضهما وعند ما يصير الوتران ححَ ، ءءَ مماسين للمنحنى المعلوم

شكل ١٠

س١٣ك العمودي على منحن من نقطة مفروضة عليه هو المستقيم المقام عموديا على مماس ذلك المنحنى من النقطة المفروضة

مثلا العمودي على منحنى س ا سَ من نقطة ا هو العمود ا ء المقام من نقطة ا على المماس ب ح للمنحنى المذكور في نقطة ا المذكورة

ويؤخذ

ويؤخذ من هذا التعريف أولاً أن محاور أى منحن هى العموديات عليه فى نقط رؤسه وثانيا أن جميع أنصاف أقطار الدائرة أعمدة على محيطها

# الفصل الثانى

## فى طرق رسم المماس لمنحن ما والعمودى عليه

سـ ٤ ـد كثير من المنحنيات ما يكون لمماسه جملة خواص مخصوصة به ولا توجد فى غيره منها تستنتج بعض طرق هندسية مضبوطة بها يمكن رسم المماس لهذا المنحنى بالسهولة وذلك كالدائرة مثلا فان لمماسها خاصية معلومة وهى كونه عموديا على نصف القطر المار بنقطة التماس فبواسطة هذه الخاصية وجدت سهولة عظيمة فى كيفية رسم المماس لمحيط الدائرة

وخلاف ذلك توجد أيضا عدة منحنيات لمماسها خواص مختلفة نذكرها عند الكلام على كل نوع من هذه المنحنيات فى محله

لكن أغلب المنحنيات ليس لمماسها خواص تساعد على رسمه فيضطر على رسمه بطريقة تقريبية

سـ ٥ ـد ولنشرح حينئذ الطرق اللازم سلوكها فى رسم المستقيم المماس لمنحن معلوم حيثما اتفق مجهول الخواص بالكلية فنقول

ان رسم المماس لمنحن ما يشتمل على ثلاث مسائل أصلية نذكرها على الترتيب وهى

(المسئلة الاولى) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن ما من نقطة مفروضة عليه

(المسئلة الثانية) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم ومار بنقطة خارجة عنه

(المسئلة الثالثة) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم وموازٍ لمستقيم معلوم أيضا

ولنورد لك حل هذه المسائل الثلاث على الترتيب ثم نذكر بعد حلها حل المسائل المناظرة لها فى كيفية رسم العمودى على منحن معلوم فنقول

# المسئلة الأولى

ستلد اذا كان المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنٍ معلوم من نقطة مفروضة عليه تستعمل الطريقة المعروفة بطريقة المنحنى المساعد وهي أن يفرض أن المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنٍ كالمنحنى س ا سَ من نقطة ا المفروضة عليه كما في (شكل ١١) ولذلك تمد من نقطة التماس وهي ا جملة مستقيمات قاطعة للمنحنى كالمستقيمات



شكل ١١

اب ، اتَ ، اتً الخ وه اب ، ابَ ، ابً والخ فهذه القواطع تقطع المنحنى المعلوم في نقط مثل نقط ب ، تَ ، تً الخ وه ب ، بَ ، بً ، الخ بعضها في احدى جهتي نقطة التماس والبعض الآخر في جهتها الثانية ثم يؤخذ على هذه القواطع بالابتدا من النقط المذكورة جملة ابعاد متساوية طول الواحد منها اختياري كالابعاد ب حـ ، تَ حَ ، ... الخ وه ب حـ ، بَ حَ ، ... الخ مع الاعتنا بأخذ هذه الابعاد على امتداد القواطع في احدى جهتي نقطة التماس وعلى نفس القواطع في الجهة الثانية منها ثم تجمع نقط نهايات الابعاد المقطوعة بخط متصل فيحدث منحنٍ جديد يكون مارا بالضرورة بنقطة التماس وهي ا وذلك لأنه يوجد من ضمن القواطع التي في الجهة اليمنى قاطع يكون وتره المحصور داخل المنحنى الجديد مساويا بالضبط الى البعد ب حـ

ويعلم من ذلك انه اذا فرض أن المماس اط معلوم وأخذ عليه بالابتدا من نقطة التماس بعد مساوٍ الى ب حـ كالبعد اء كانت نهاية هذا البعد نقطة من نقط المنحنى المساعد وحينئذ بالعكس اذا جعلت نقطة التماس ا مركزا وببعد مساوٍ الى ب حـ يرسم قوس دائرة فيقطع المنحنى المساعد في نقطة تكون هي احدى نقط المماس المطلوب

ويستفاد مما تقدم انه بدل رسم المنحنى المساعد بأكمله يكتفى فقط برسم الجزء المجاور لنقطة ء وأنه لاجل الضبط في ايجاد المماس يؤخذ الطول الاختياري ب حـ طويلا طولا كافيا وملائما

المسئلة

## المسئلة الثانية

س١٧ المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم ومار بنقطة خارجة عنه يمكن حل هذه المسئلة بواسطة المسطرة فقط بان يجعل حد المسطرة مارا بالنقطة المعلومة ومماسا لهذا المنحنى لكن هذه الطريقة غير كافية لضبط اتجاه المماس ولا لتعيين نقطة التماس بالضبط ويتوصل الى تعيين المماس ونقطة تماسه بالضبط بواسطة الطريقة الآتية المسماة ايضا بطريقة المنحنى المساعد

مثلا ليكن س ا سَ (شكل ١٢) هو المنحنى المعلوم ولتكن نقطة هـ هي النقطة التي يراد إمرار المماس بها فيمد من نقطة هـ قاطعا كالقاطع هـ ب متباعدا عن وضع المماس بعد قليل ثم يقام عليه من نقطتى ب , حـ فى اتجاهين متضادين عمودان مثل ب د , حـ ى ويؤخذ على كل منهما بعد مساو الى الوتر المقطوع ب حـ ثم يمد منها قاطع آخر ونجرى عليه العملية بعينها وهكذا تؤخذ جملة قواطع كافية لتحصيل عدة نقط مثل دَ , دً , الخ و ى , ىَ , ىً الخ متقاربة من بعضها قربا كافيا ونجمع هذه النقط بخط متصل فيحدث منحن



يكون بالضرورة مارا بنقطة التماس المطلوبة لانه متى صار القاطع مماسا يصير الوتر المقطوع ب حـ مساويا للصفر ويصير كل من العمودين ب د , حـ ى معدوما

(تنبيه) يمكن اخذ الاعمدة ب د , حـ ى مساوية لضعف البعد ب حـ أو الى ثلاثة امثاله أو الخ وتعويض الاعمدة المذكورة بمستقيمات متوازية مثنى اتجاهها اختيارى لكن بشرط ان تكون الزوايا هـ ب د , هـ بَ دَ , .... الخ متساوية دائما

## المسئلة الثالثة

س١٨ المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن ومواز لاتجاه معلوم قد يمكن ايضا حل هذه المسئلة بواسطة المسطرة بان تحرك بالتوازى للاتجاه

المعلوم حتى يصير حدها مماسا للمنحنى الا انه بهذه الطريقة لا يمكن تعيين نقطة التماس بالضبط الكافى فلاجل تعيينها نجرى عليها العمل كما اجريناه على المسئلة الثانية بان نمد جملة قواطع موازية الى الاتجاه المعلوم ويقام من نهايتى كل قاطع منها مستقيمان مختلفا الاتجاه وعموديان عليه ونؤخذ عليهما ابعاد مساوية للوتر المقطوع وتتم العملية كما تقدم ( انظر تنبيه المسئلة الثانية )

## فى كيفية رسم العمودى على منحنى

س ٩١ د يشتمل البحث عن المستقيم العمودى على منحن على ثلاث مسائل أصلية كالبحث عن مماس هذا المنحنى

## المسئلة الاولى

ان يكون المطلوب تعيين المستقيم العمودى على منحن من نقطة مفروضة عليه ولحل هذه المسئلة نبحث بمقتضى ما تقدم عن المماس لهذا المنحنى فى النقطة المعلومة ويقام من نقطة التماس عمود عليه فيكون هو المستقيم العمودى على المنحنى

## المسئلة الثانية

س ٩٢ د المطلوب ايجاد المستقيم العمودى على منحن من نقطة خارجة عنه مثلا ليكن س ا سَ (شكل ١٣) هو المنحنى المعلوم ونقطة هـ هى النقطة التى يراد مد المستقيم العمودى على المنحنى منها

فنفرض ان المسئلة محلولة وان هـ ا هو العمودى المطلوب ونقول

من المعلوم انه اذا جعلت نقطة هـ مركزا وبعد مساو الى هـ ا رسم محيط دائرة لكانت هذه الدائرة مماسة للمنحنى المعلوم حيث ان العمودى على كل منهما فى نقطة التماس واحد ولاجل تعيين نقطة ا نجعل نقطة هـ مركزا ونرسم جملة اقواس متحدة المركز قاطعة للمنحنى المعلوم

شكل ١٣

فى

فى نقطتى ب ح و ب ح .. الخ ثم يقام من نهايتى كل وتر من الاوتار ب ح ب ح .. الخ فى اتجاهين متضادين مستقيمان عمودیان عليه ويؤخذ على كل منهما بعد مساو له كما تقدم ويجمع النقط ء ء .. الخ و ء ء .. الخ بخط متصل فيحدث منحن يكون بالضرورة مارا بنقطة ا وبه تتعين هذه النقطة بغاية الضبط كلما كثرت النقط وقربت من بعضها

## المسئلة الثالثة

س٢١ المطلوب مد مستقيم عمودى على منحن ومواز لمستقيم معلوم يكفى لحل هذه المسئلة رسم مستقيم مماس للمنحنى وعمودى على الاتجاه المعلوم ثم تعين نقطة تماسه بمقتضى ما تقدم ويقام منها مستقيم عمودى عليه فيكون هو العمودى المطلوب

# الفصل الثالث

## فى تقدير أطوال المنحنيات ومساحة الاشكال المنحنية

س٢٢ كثير من المنحنيات ما يمكن تعيين طوله بالضبط والسهولة سواء كان بالطريقة الحسابية أو بالطريقة الرسمية وذلك كالدائرة والقطع الناقص وغيرهما مما سنذكره فى محله لكن فى أغلب الاحوال لا يمكن تقدير طول المنحنيات الا بالطريقة التقريبية

وهى أن يرسم داخل القوس أو المنحنى الذى يراد تقدير طوله خط كثير الانضلاع أضلاعه صغيرة جدا على قدر الامكان ثم يقاس طول هذا الخط فيكون طوله عين طول المنحنى الاصلى تقريبا

واذا اريد ايجاد طول القوس بغاية التقريب يرسم عليه خط كثير الاضلاع اخر أضلاعه صغيرة جدا ومماسة لهذا المنحنى فيكون طول هذا الخط أكبر من طول المنحنى وطول الخط الاول أصغر منه وحينئذ اذا اخذنا المتوسط بين الطولين كان هو طول المنحنى مقربا الى الحقيقة جدا

أما اذا كان المنحنى الذى يراد قياس طوله موجودا على سطح جسم صلب فيكتفى بأن يلف عليه شريط لين قابل للالتفاف عليه كما اذا اريد معرفة طول محيط جذع

شجرة مثلا ومع ذلك فان هذه الطريقة لا تستعمل الا فى الاعمال التقريبية لانها لا تعطى الطول الحقيقى حيث انه بكثرة شد الشريط أو قلته يزيد الطول أو ينقص

# فى تقدير مساحة الاشكال المنحنية

س ٢٣ الاشكال المستوية المحدودة بخطوط منحنية غير منتظمة الانحنا لا يمكن تعيين مساحتها بطرق بسيطة مضبوطة بل يلزم الاستعانة على تعيين مساحتها بطرق تقريبية نذكرها فنقول

(طريقة أشباه المنحرف) لنفرض أن المراد معرفة مساحة الشكل المتكون من جزء منحنى مثل م ل (شكل ١٤) ومن مستقيم مثل س سَ ومن العمودين المنزلين من نهايتى المنحنى على هذا المستقيم

شكل ١٤

ولذلك تقسم المسافة ك هـ الى جملة اقسام متساوية عددها حيثما اتفق يرمز لكل منها بحرف ع ثم يقام من نقط التقاسيم أعمدة على المستقيم س سَ فهذه الاعمدة المسماة بالاحداثيات الرأسية تقسم الشكل المعلوم الى جملة أشباه منحرفات صغيرة وقائمة الزوايا فى كل منها ضلع واحد منحن لكنه يكون صغيرا جدا حينما تقسم المسافة هـ ك الى جملة اقسام عددها كاف لاعتباره كمستقيم ثم تعتبر جميع هذه الاشباه منحرفات كانها مستقيمة الاضلاع ويبحث عن مساحة كل منها على حدته ومجموع مساحات هذه الاشكال الجزئية يكون هو مساحة السطح الكلى التى يراد تعيينها وهذه المساحة تكون قريبة من المساحة الحقيقية كلما كانت ارتفاعات الاشباه منحرفات صغيرة جدا

ولنفرض أن ص , ص١ , ص٢ , . . . ص ن هى اطوال الاحداثيات الرأسية المتتالية وأن ع ارتفاع مشترك لكل منها ونرمز بحرف س لمساحة الشكل الكلى فيكون

$$\text{س} = \text{ع}\,\frac{\text{ص} + \text{ص}_1}{2} + \text{ع}\,\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} + \dots + \text{ع}\,\frac{\text{ص}_{\text{ن}-1} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2}$$

أو

$$\text{س} = \text{ع}\left[\frac{\text{ص} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2} + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \dots + \text{ص}_{\text{ن}-1}\right]$$

وعلى هذا تكون مساحة الشكل الكلى مساوية لحاصل ضرب المسافة بين كل احداثيين

متواليين

متواليين في مجموع الاحداثيات المتوسطة مضافا اليه نصف مجموع الاحداثيين المتطرفين

ويشاهد من ذلك أن المساحة المأخوذة بهذه الطريقة تكون أصغر من المساحة الحقيقية بقليل عندما يكون تقعير المنحنى موجها نحو المستقيم س سَ كما حصل ذلك في (شكل ١٤) وفي الواقع لأن كل شبه منحرف منحنى الضلع استعوض بشبه منحرف مستقيم الاضلاع أصغر منه

وبالعكس تكون هذه المساحة أكبر من المساحة الحقيقية عندما يكون تحديب المنحنى جهة المستقيم س سَ

وأما اذا كان المنحنى المعلوم مشتملا على جملة انقلابات كان بعض أشباه المنحرف أكبر من مناظره والبعض الآخر أصغر منه بحيث يحصل التعادل الجزئي بينهما

س ٢٤ د في طريقة المسيو بونسليه — بونسليه اخترع طريقة بها يمكن الحصول بغاية السرعة على مساحة أضبط من الأولى وغاية هذه الطريقة هي أن تقسم المسافة هـ ك (شكل ١٥) الى عدد زوجي من الاقسام المتساوية مثل الاقسام هـ ا ، ا ب ، ب ج الخ يرمز لطول كل واحد منها بحرف ع

ثم تقام من جميع نقط التقاسيم احداثيات مثل ا ا ، ب ب ، الخ وتوصل المستقيمات م ا ، ا ج ، الخ فتحصل كما تقدم جملة اشباه منحرف مستقيمة الاضلاع ارتفاع أولها وآخرها هو البعد ع وأما ارتفاع باقيها فانه مساو الى ٢ع ثم تمسح هذه الاشكال أي تؤخذ مساحاتها وتجمع ويرمز لحاصل جمعها بحرف ط فتكون مساحاتها على التوالي هي

شكل ١٥

$$ع\ \frac{ص + ص_{١}}{٢} ،\ ع\ (ص_{١} + ص_{٢}) ،\ ع\ (ص_{٢} + ص_{٣}) ،\ \dots\dots ،\ ع\ (ص_{ن-٣} + ص_{ن-١})$$

$$،\ ع\ \frac{ص_{ن-١} + ص_{ن}}{٢}$$

وبجمع هذه المساحات على بعضها يحدث

$$ط = ع \left[ \frac{ص + ص_{ن}}{٢} + \frac{١}{٤} (ص_{١} + ص_{ن-١}) + ٢ (ص_{٣} + ص_{٥} + \dots\dots + ص_{ن-٣}) \right]$$

فاذا اضفنا كمية $\frac{\text{ص}_{\text{٠}}+\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{٢}}$ وطرحناها من الكمية التى داخل القوسين حدث

$$\text{ط} = \text{ع}\left[\frac{\text{ص}_{\text{٠}}+\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{٢}} - \frac{\text{ص}_{\text{١}}+\text{ص}_{\text{ن}-\text{١}}}{\text{٢}} + \text{٢}(\text{ص}_{\text{١}}+\text{ص}_{\text{٣}}+\text{ص}_{\text{٥}}+\ldots\ldots\text{ص}_{\text{ن}-\text{١}})\right]$$

ثم نرسم من نقط ا وح ولخ التى هى نهايات الاحداثيات الرأسية الزوجية الوضع مماسات للمنحنى المعلوم فتتكون من ذلك جملة أشباه منحرف جديدة مثل م هـ ب ت و تَ ب ء عَ ولخ التى يمكن ايجاد مساحاتها بالسهولة لان ارتفاع كل منها مساو الى ٢ع وفيها الاحداثى المنسوب لنقطة التماس مساو الى نصف مجموع القاعدتين فاذا رمز بحرف طَ لمجموع هذه الاشباه منحرف كان

$$\text{طَ} = \text{٢ع}\,(\text{ص}_{\text{١}}+\text{ص}_{\text{٣}}+\text{ص}_{\text{٥}}+\ldots\ldots+\text{ص}_{\text{ن}-\text{١}})$$

فاذا تأملنا نجد أن مقدار ط أصغر من المساحة المطلوبة وأن مقدار طَ أكبر منها وذلك كما فى مثالنا هذا ( وانما حينما يكون تحديب المنحنى جهة المستقيم س سَ فيكون الامر بالعكس ) وعلى هذا اذا اخذ المتوسط بين مقدارى ط , طَ تحصل مقدار المساحة المقربة جدا من المساحة الحقيقية فاذا رمز بحرف ح لهذه المساحة المقربة جدا حدث

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}+\text{طَ}}{\text{٢}} = \text{ع}\left[\frac{\text{ص}_{\text{٠}}+\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{٤}} - \frac{\text{ص}_{\text{١}}+\text{ص}_{\text{ن}-\text{١}}}{\text{٤}} + \text{٢}(\text{ص}_{\text{١}}+\text{ص}_{\text{٣}}+\ldots\ldots\text{ص}_{\text{ن}-\text{١}})\right]$$

واما اذا كان للمنحنى بعض انقلابات يلزم أولا أن ترسم الاحداثيات الرأسية المارة بنقط الانقلاب وتؤخذ مساحة كل شكل من الاشكال الحادثة على حدتها وتجمع المسايح الحادثة على بعضها فتحدث المساحة الكلية

ش ٣٥ ومن المشاهد فى هذه الطريقة أنه لا يحتاج فيها الا القياس الاحداثيات المتطرفة والاحداثيات المزدوجة الوضع وعليه فيكون العمل بها أسرع من الطريقة المتقدمة سيما انه يتحصل بها على مساحة اقرب الى المساحة الحقيقية من الاولى ولها مزية أخرى وهو أنه يمكن بواسطتها معرفة نهاية الخطاء الذى يحدث فيها وفى الواقع من حيث ان هذا الخطأ بالبداهة أصغر من نصف الفرق بين المساحتين وهما ط , طَ فيكون

$$\text{الخطأ} < \frac{\text{طَ}-\text{ط}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{٤}}\left[(\text{ص}_{\text{١}}+\text{ص}_{\text{ن}-\text{١}}) - (\text{ص}_{\text{٠}}+\text{ص}_{\text{ن}})\right]$$

وفى هذا القانون يمكن تقدير الكمية الموجودة بين القوسين بالطريقة الهندسية لانه فى الواقع اذا وصل بين نقطتى م , هـ نهايتى المنحنى بمستقيم وكذا بين

نهايتى

نهايتى الاحداثى الثانى والاحداثى الذى قبل الاخير بمستقيم آخر حدث مستقيمان قاطعان للاحداثى المتوسط فى نقطتى ر , و فيحدث من شبهى المنحرفين م هـ ك و , ر ا ا ل ل أن

$$\text{رجـ} = \frac{\text{ص} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2} \quad , \quad \text{وجـ} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_{\text{ن}-1}}{2}$$

ومنهما يكون

$$\text{وجـ} - \text{رجـ} = \text{ور} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_{\text{ن}-1}}{2} - \frac{\text{ص} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2}$$

وبناً عليه يكون

$$\frac{\text{ط}' - \text{ط}}{2} = \frac{\text{ع}}{2} \times \text{ور}$$

وهذا المقدار يكون فى العادة أكبر من الخطأ الحادث فى العملية بمعنى إنه يكون نهاية لذلك الخطأ

٢٦ـ تطبيق على ذلك ـ لأجل مقارنة العمل بهاتين الطريقتين نطبق كلا منهما على التوالى فى كيفية ايجاد مساحة قطعة دائرة كالقطعة ا ب جـ ء (شكل ١٦) المحصورة بين نصف القطر ا ب وبين قوس الدائرة ب جـ المقابل مساويا الى °٣٠ وبين المستقيم جـ ء الموازى الى نصف القطر ا ب وبين المستقيم ء ا المقام من المركز ا عموديا على نصف القطر ا ب

فاذا فرضنا ان نصف القطر ا ب مساوٍ الى ٤ متر وقسمنا المسافة الكائنة بين الاحداثيين المتطرفين الى اربعة اجزاء متساوية كان

$\text{ص} = ٤٫٠٠٠٠$ ,

$\text{ص}_1 = ٣٫٩٦٨٦$ ,

$\text{ص}_2 = ٣٫٨٧٣٠$ ,

$\text{ص}_3 = ٣٫٧٠٨١$ ,

$\text{ص}_4 = ٣٫٤٦٤١$ ,

$\text{ع} = ٠٫٥٠٠٠$

شكل ١٦

ب جـ °٣٠ ا ء

فبمقتضى الطريقة الاولى أعنى طريقة اشباه المنحرف يكون

$$\text{ح} = ٠٫٥ \left( \frac{٤ + ٣٫٤٦٤١}{٢} + ٣٫٩٦٨٦ + ٣٫٨٧٣٠ + ٣٫٧٠٨١ \right)$$

$= ٧٫٩٦٠٩$ أمتار مسطحة

وبطريقة بونسليه يكون

$$\text{ح} = ٠٫٥ \left( \frac{٣٫٤٦٤١+٤}{٢} - \frac{٣٫٧٠٨١+٣٫٩٦٨٦}{٢} + ٢(٣٫٩٦٨٦+٣٫٧٠٨١) \right) = ٧٫٦٥٠٢ \ \text{م}^{\text{س}}$$

وحيث انه ممكن في هذا المثال حساب المساحة المطلوبة بالضبط أعني ممكن ايجاد حقيقتها وذلك بملاحظة أنها مركبة من قطاع دائرة قوسه ٣٠° مساحته مساوية بالضرورة الى جزء من اثنى عشر جزءا من سطح الدائرة مضافا اليه مثلث قائم الزاوية أحد ضلعي قائمته هو مسقط القوس على المستقيم المقابل له والضلع الثاني مساو لنصف ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل هذه الدائرة

فحينئذ تكون المساحة الحقيقية هي

$$\text{ح} = \frac{\text{ط نق}^٢}{١٢} + \frac{\text{نق}^٢\sqrt{٣}}{٨} = ١٦\left(\frac{\text{ط}}{١٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٨}\right) = ٨\left(\frac{\text{ط}}{٦} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}\right) = ٧٫٦٥٢٩ \ \text{متراً مسطحاً}$$

وحينئذ يكون الخطأ المتحصل من الطريقة الأولى هو ٠٫٠١٢ والمتحصل من طريقة يونسليه هو ٠٫٠٠٢٧ فقط واذا حسبنا نهاية الخطأ بالقانون المتقدم المختص بذلك نجد أن

$$\text{الخطأ} = \frac{٠٫٥}{٤}\left[٣٫٩٦٨٦ + ٣٫٧٠٨١ - (٣٫٤٦٤١+٤)\right] = ٠٫٠٢٦٦$$

فيشاهد أن هذا الخطأ أكبر من الخطأ الحقيقي بعشر مرات

وهناك توجد طريقة أخرى لايجاد المساحة التقريبية للاشكال المنحنية وهي المنسوبة الى المسيو (توما سمپسون) لكن لا يمكن ذكرها في هذا المحل لكونها مبنية على خاصية في القطع المكافي ولذلك قد أخرناها هنا لكن سنذكرها بعد الكلام على القطع المكافي ان شاء الله تعالى

س ٢٧ (في كيفية تعيين المساحة بالوزن) هذه الطريقة التي ليست هندسية بالكلية تستعمل كثيرا في العمل

مثلا ليكن م ء هـ ك (شكل ١٧) هو الشكل الذي يراد ايجاد مساحته فيرسم أولا هذا الشكل على فرخ من الورق أو من المعدن متماثل التركيب والمادة تماثلا جيدا ومتحد السمك في جميع امتداده ويحدد الاحداثيان هـ ء, ك م حتى يتكون عنهما شكل مستطيل مثل ا ب هـ ك

شكل ١٧

فنوخذ

فتؤخذ مساحته بالطريقة المعتادة ثم يقطع هذا المستطيل من الفرخ او اللوح المرسوم هو عليه ويوزن بميزان كثير الاحساس ثم يقطع اللوح على حسب محيط المنحنى ويوزن الشكل الاصلى وهو هـ ٢ م ك وحيث انه فى هذه الحالة تكون المساحات مناسبة للاثقال وقد علم ثقل المساحتين واحدهما فتحل المسئلة بواسطة القاعدة الثلاثية مثلا اذا رمز بحرف ج لمساحة المستطيل وبحرف و لوزنه وبحرف وَ لوزن الشكل الذى يراد معرفة مساحته وبحرف س لمساحته المجهولة فيكون

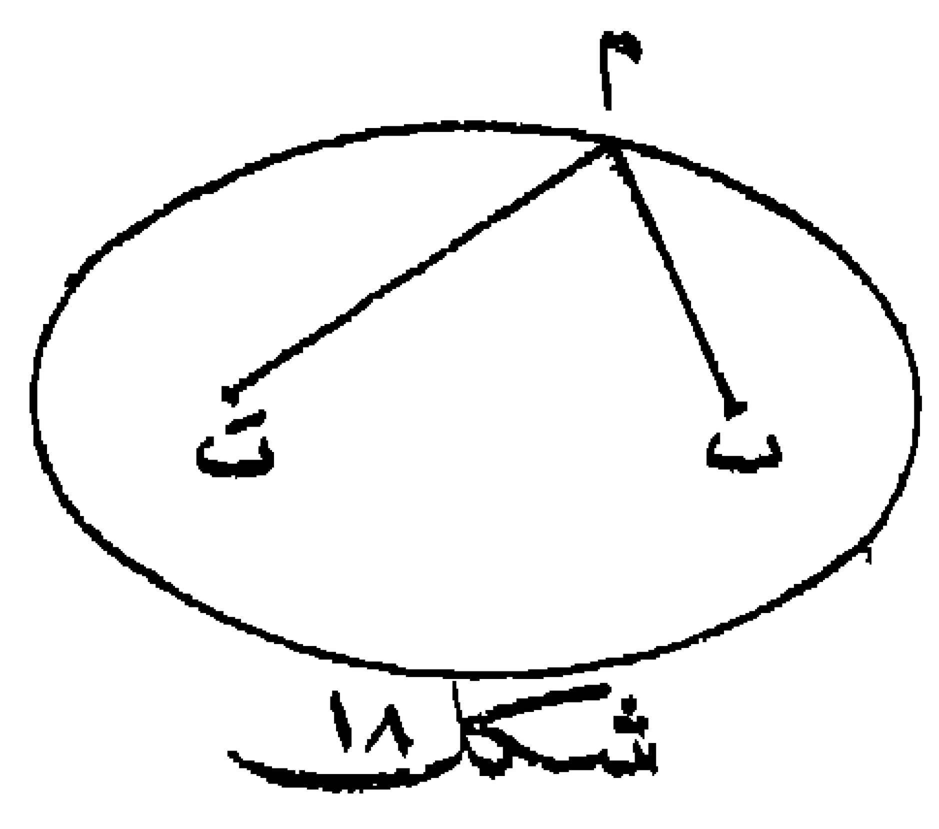
$\frac{س}{ج} = \frac{وَ}{و}$ ومنه يكون $س = \frac{ج وَ}{و}$

وهذه طريقة قديمة وكانت مستعملة فى ابتداء هذا القرن ومع ذلك فانه لم يترك استعمالها الى الآن بل تستعمل نادرا فى الاشغال العمليه

# الباب الثانى
## فى القطع الناقص والجسم الناقصى
# الفصل الاول
## فى تعريف منحنى القطع الناقص وفى طرق رسمه

٢٨ ـ القطع الناقص هو منحن مستو مجموع بعدى أى نقطة من محيطه عن نقطتين ثابتتين داخله يساوى كمية ثابتة

والنقطتان المفروضتان داخله الثابتتان تسميان بورتين والبعدان الواصلان من بورتيه الى نقطة حيثما اتفق من محيطه يسميان بعدين بوريين او نصفى قطرين بوريين



شكل ١٨

وهذا المنحنى يكون بالضرورة منحنيا مقفولا

٢٩ ـ (فى رسم القطع الناقص بطريقة الاستمرار)

تنتج من تعريف القطع الناقص طريقة لرسمه بحركة مستمرة ولذلك يرمز بكمية ٢ ي لمجموع نصفى القطرين البوريين ويؤخذ

خيط طوله مساوٍ لهذه الكمية وتثبت نهايتا هذا الخيط في مسمارين رفيعين موضوعين في البورتين ب رَ (شكل ١٨) ثم يشد الخيط بسن قلم الرسم ويحرك القلم مع جعل الخيط على الدوام مشدودا فمن البديهي ان سن القلم يرسم اثناء تحركه محيط القطع الناقص

وهذه هي الطريقة التي تستعملها الجنايني حينما يريدون تخطيط القطع الناقص على الارض انما يستعوض في هذه الحالة المسماران والقلم الرصاص بثلاثة أوتاد يوضع اثنان منها في البورتين والثالث يحرك باليد بدل قلم الرسم ويستعوض أيضا الخيط بحبل طوله مساو الى ٢ ب

لكن من المشاهد أنه لا يتحصل بهذه الطريقة على الضبط الكلي في تعيين نقط القطع الناقص التي تكون قريبة من المستقيم الواصل بين البورتين لانه لقرب جزئي الخيط وانطباقهما على بعضهما تقريبا لا يكون أحدهما مستقيما وفضلا عن ذلك انه متى رسم أحد نصفي القطع الناقص لزم بالجبر رفع القلم من داخل الخيط لاجل امرار الخيط الى الجهة الثانية من المستقيم ب ت وذلك لاجل رسم النصف الآخر لكن يمكن بسهولة مداواة عيوب هذه الطريقة باستعمال الطريقة الآتية

(طريقة ثانية) يستعمل في هذه الطريقة خيط طرفاه مربوطان ببعضهما طوله الكلي مساو الى ٢ ب + ٢ حـ بفرض أن ٢ حـ رمز للبعد بين البورتين ثم يلف هذا الخيط على المسمارين ويجعل على الدوام مشدودا بواسطة القلم فبهذه الكيفية يمكن رسم القطع الناقص باكمله دفعة واحدة بدون وقوف أبدا

هذه الطريقة وان كانت سهلة وسريعة العمل لكنها قليلة الضبط أيضا لأنه يصعب أولا عقد الخيط بحيث يكون جزءه المطلق مساويا بالضبط الى الطول المعلوم ثانيا لانها تستلزم استعمال خيط رفيع لاجل سهولة انثنائه فيتسبب عن ذلك تغيير طول هذا الخيط بحسب كثرة شده وقلته

سند (رسم القطع الناقص نقطة فنقطة) . حينما يراد رسم القطع الناقص بالضبط فالاحسن ان تعين منه جملة نقط ثم تمر بها خطا منحنيا متصلا ولاجل الحصول على النقط الكافية لذلك يستسهل استعمال المبرجل

مثلا

مثلا ليكن ب ، بَ (شكل ١٩) هما بورتا القطع الناقص الذى يراد رسمه فيؤخذ على المستقيم الواصل بينهما بعد بَ ك مساويا الى ٢ م ثم تجعل نقطة بَ مركزا ويرسم محيط دائرة حيثما اتفق فيقطع خط ب بَ فى نقطة ء وتجعل أيضا نقطة ب مركزا وبنصف قطر مساو الى ء ك يرسم محيط دائرة يقطع الاول فى نقطتين مثل م ، مَ

شكل ١٩

فمن البديهى أن تكون هاتان النقطتان من القطع الناقص وبهذا السير يمكن ايجاد جملة نقط بحسب الارادة بتغيير وضع نقطة ء ويلاحظ أنه فى كل وضع من أوضاع نقطة ء يمكن ايجاد أربع نقط من القطع الناقص ويكفى لذلك أن يبدل العمل على البورتين ب ، بَ بمعنى أن تجعل نقطة ب مركزا وترسم دائرة كالدائرة التى رسمت بجعل نقطة بَ مركزا والعكس بالعكس ومن المشاهد بالسهولة أيضا ان نقطة ء لا يمكن ان تشغل على المستقيم ب بَ أوضاعا اختيارية لانه يلزم لاجل امكان تقاطع الدائرتين أن يكون البعد بين مركزيهما على الدوام أصغر من مجموع نصفى القطرين وأكبر من فاضلهما ولا شك أن ذلك يستلزم أن لا يكون أحد نصفى القطرين أكبر من البعد بَ ا ولا أصغر من اك حيث كانت نقطة ا وسطا للبعد ب ك

## فى بعض قواعد ونظريات هندسية

١٣ـ النظرية الاولى ـــ القطع الناقص منحن محدب

ولاثبات ذلك يكفى أن نبرهن على أن المستقيم لا يقطعه الا فى نقطتين ويتوصل الى ذلك بشرح المسئلة الآتية

وهى طريقة ايجاد نقطتى تقابل المستقيم بمنحنى القطع الناقص التى يؤل منطوقها الى المنطوق الآتى

المعلوم نقطتان ومستقيم والمراد ايجاد النقطة الكائنة على هذا المستقيم التى

يكون حاصل جمع بعديها عن النقطتين المعلومتين مساويًا لطول معلوم مثلا ليكن ب ، تَ (شكل ٢٠) بورتي القطع الناقص أعني النقطتين المعلومتين وليكن م ، مَ المستقيم المعلوم فنفرض أن المسئلة محلولة وان نقطة م هي النقطة التي يراد ايجادها فنصل المستقيم تَ م ونمده بقدر المسافة م هـ المساوية الى م ب لاجل ان يكون تَ هـ مساويا للمجموع المعلوم ثم نعين النقطة بٖ المماثلة لنقطة ب بالنسبة للمستقيم م مَ فتكون الثلاثة ابعاد م هـ ، م ب ، م بٖ متساوية ولو رسمت دائرة مركزها نقطة م ونصف قطرها م ب لمرت بالثلاث نقط ب ، بٖ ، هـ التي معلوم منها النقطتان الاوليان وهما ب ، بٖ واما الثالثة فايجادها سهل وفي الواقع لاننا اذا جعلنا نقطة تَ مركزا وبنصف قطر مساو للمجموع المعلوم ورسمنا دائرة فانها تمر بنقطة هـ وتكون مماسة الى الدائرة السابقة في النقطة المذكورة وحيث ان رسم هذه الدائرة سهل لان مركزها ونصف قطرها معلومان فتؤل المسئلة الى ايجاد مركز دائرة تمر بنقطتين معلومتين وتمس محيط دائرة معلومة

شكل ٢٠

وهذه المسئلة قد سبق حلها في الهندسة العادية ومعلوم انه يكفي فيها أن نمرر بالنقطتين المعلومتين ب ، بٖ محيط دائرة حيثما اتفق فيقطع محيط الدائرة المعلوم في نقطتي ك ، كَ ويوصل بين ك ، كَ بمستقيم ك كَ ويمد الى أن يتقابل مع امتداد مستقيم ب بٖ في نقطة ء ثم نمرر بهذه النقطة مماس للمحيط المعلوم فتكون نقطة التماس هـ لهذا المماس هي نقطة تماس الدائرة المطلوبة ومع ذلك فلا باس من ذكر اثبات هذه العملية من باب التذكار فنقول حيث كان المستقيم ء هـ مماسا للمحيط المطلوب وكان ء ب قاطعا له فيحدث

ءهـ² = ء ب × ء بٖ

فاذا وصل من نقطة ء الى نقطة اختيارية مثل ك من المحيط المعلوم حدث ايضا

ءهـ² = ء ك × ء كَ

وبناء

وبنا على ذلك يكون

ى ب × ى ب = ى ك × ى كَ

وحينئذ تكون الاربع نقط ب , ب , ك , كَ موجودة على محيط دائرة واحدة يعنى اننا اذا امررنا بنقطتى ب , ب ثم بنقطة ك الاختيارية محيط دائرة مر ايضا بنقطة كَ الموجودة على المحيط المعلوم وعلى المستقيم ى ك

وحيث اننا لا نبحث فى المسئلة التى نحن بصددها الا عن مركز هذه الدائرة فليس رسمها ضروريا بل يكفى أن نصل من نقطة تَ الى نقطة ﻫ بمستقيم فيقطع المستقيم المعلوم فى المركز المطلوب م

وحيث انه يمكن من نقطة ى تمرير مماسين للدائرة فيوجد حينئذ للمسئلة حل آخر هو مَ يتحصل عليه بوصل نقطة تَ مع نقطة تماس المماس الآخر فاذا كانت نقطة ى موجودة على محيط الدائرة الذى مركزه نقطة تَ فلا يوجد للمسئلة الا حل واحد وتكون المسئلة غير ممكنة الحل اذا كانت نقطة ى داخل محيط الدائرة المذكور

وحينئذ تبين ان لهذه المسئلة على الاكثر حلان اثنان فقط يعنى انه لا يمكن المستقيم ان يقابل محيط القطع الناقص الا فى نقطتين وهذا هو ما لزم اثباته

# فى محاور القطع الناقص ورؤسه

بند ٣٢ـ النظرية الثانية ـــ المستقيم الواصل بين بورتى قطع ناقص والمستقيم العمودى عليه من وسطهما محورا هذا المنحنى

لاننا اذا لاحظنا ما سبق فى كيفية رسم المنحنى بالطريقة الثانية المذكورة فى بند ٣٠ وجدنا أن أى نقطة من محيط القطع الناقص قد تعينت من تقاطع قوسين مرسومين بجعل كل من البورتين مركزا وبنصفى قطرين مجموعهما يساوى ٢ ﺣ . لكن من البديهى انه اذا تقاطع محيطا دائرتين حدث من تقاطعهما نقطتان متماثلتا الوضع بالنسبة للمستقيم الواصل بين مركزيهما فيظهر من ذلك أن نقط محيط القطع الناقص متماثلة مثنى بالنسبة للمستقيم ب تَ وبنا عليه يكون هذا المستقيم محورا له وذلك هو مقتضى التعريف المقرر فى بند ٧

بند ٣٣ـ ثانيا قد أوردنا أيضا فى بند (٣٠) أنه بعد ايجاد نقطتى م مَ (شكل ١٢)

يمكن بتغيير العمل على البورتين ب ، بَ ايجاد نقطتين اخريين مثل هـ ، هَ من القطع الناقص ومن البديهي أنه اذا دور الشكل حول مستقيم ءءَ العمودي على وسط المستقيم ب بَ نصف دورة صارت نقطة ب في بَ ونقطة بَ في ب وكذا تأخذ نقطة هـ وضع نقطة م والعكس بالعكس ويظهر حينئذ أن نقط المنحنى متماثلة الوضع أيضا بالنسبة الى مستقيم ء ءَ فيكون هذا المستقيم بالضرورة محورا آخر له

وينتج من ذلك ان للقطع الناقص اربع رؤس سهلة الايجاد وفي الواقع كذلك لانه مشاهد أن الرأس ا الموجودة على المحور ب بَ هي وسط البعد ب ك اذ يلزم أن يكون بَ ا + ب ا = بَ ك ويطرح بَ ا من كل من الطرفين يحدث ب ا = ا ك

شكل ٢١

وأما الرأس اَ فلتعيينها يؤخذ الطول ب كَ = بَ ك على المحور وينصف بعد بَ كَ أو يؤخذ بَ اَ = ب ا

(تنبيه) من المهم ملاحظة أن المحور الاكبر ا اَ يلزم أن يكون مساويا لمجموع نصفي القطرين البوريين الذي هو كمية ثابتة وفي الواقع لأن

ا اَ = بَ ك - ا ك + اَ بَ

وحيث انه معلوم مما تقدم أن ا ك = اَ بَ = ب ك فحينئذ يكون

ا اَ = بَ ك = ٢ ى

وأما الرأسان ء ، ءَ فلتعيينهما يلاحظ أن نصفي القطرين البوريين ء ب ، ء بَ مائلان متساويا البعد عن موقع العمود ء و وبناء على ذلك يكونان متساويين فيكفي حينئذ لايجاد هاتين النقطتين أن تجعل النقطتان ب ، بَ مركزين وبنصفي قطرين متساويين وكل منهما مساو الى نصف البعد بَ ك أو الى و ا ويرسم قوسا دائرتين فتتعين من تقاطعهما الرأسان ء ، ءَ

٣٤ـ يشاهد مما تقدم آنفا ان المحور المار بالبورتين هو الاكبر وذلك لأن ء و عمود ، ء ب مائل فيكون

ء و < ء ب = او أو ء ءَ < ا اَ

وبسبب

وبسبب ذلك قد سمي أحد المحورين بالمحور الاكبر والاخر بالمحور الاصغر

س ٣٥ د اذا رمز بالكميات ٢ ر ٢ ر ٢ ر َ و ٢ حـ لمقادير كل من المحور الاكبر والمحور الاصغر والبعد بين البورتين حدث من المثلث القائم الزاوية و ب ء هذا القانون

$$ر^{٢} = رَ^{٢} + حـ^{٢}$$

الذي بواسطته يمكن حساب أحد تلك الكميات الثلاث من بعد معلومية الاثنتين الآخريين

س ٣٦ د بناء على ما تقدم يمكن ان يقال ان القطع الناقص يصير معلوما اذا علم مقدار كل من محوريه وفي الواقع لان البعد بين البورتين يستخرج من القانون المتقدم الذي ينتج منه أن

$$حـ = \sqrt{ر^{٢} - رَ^{٢}}$$

شكل ٢٢

وأما اذا كان المراد تعيينه بالطريقة الرسمية فيرسم مستقيمان متعامدان على بعضهما في نقطة مثل و (شكل ٢٢) ويؤخذ بجانبي نقطة تقاطعهما وهي و بعدان مثل و ا ر و اَ متساويان وكل منهما مساو الى ر وكذلك يؤخذ البعدان و ء ر و ءَ متساويين وكل منهما مساو الى رَ ثم تجعل نقطة ء مركزا وبنصف قطر مساو الى و ا يرسم قوس دائرة ليقابل المستقيم ا اَ في نقطتين مثل ب ر بَ تكونان هما البورتان ثم بعد ذلك تستعمل احدى الطرق السابق ذكرها لرسم المنحني

## في مركز القطع الناقص

س ٣٧ د النظرية الثالثة — نقطة تقابل المحورين هي مركز القطع الناقص ولبيان ذلك تعتبر نقطة حيثما اتفق مثل م من هذا المنحني (شكل ٢٣) ونقطة أخرى مثل هَ منه أيضا موضوعة في الزاوية الواقعة بين المحورين المقابلة للزاوية الموجودة بها النقطة الاولى لكن بحيث يكون وضع النقطة الثانية معينا بالشرط الآتي

شكل ٢٣

ب م = بَ هَ

بَ م = ب هَ

فتكون الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعى ب م ت هَ متساوية
وبنا على ذلك يكون شكلا متوازى الاضلاع وقطراه منصفين بعضهما بعضا
بحيث يكون مستقيم م هَ مارا من وسط المستقيم ب ت ويكون
و م = و هَ
وينتج حينئذ من ذلك ان نقط المنحنى متماثلة مثنى بالنسبة لنقطة و فتكون
هذه النقطة مركز المنحنى وذلك بنا على التعريف المقرر فى س ٩

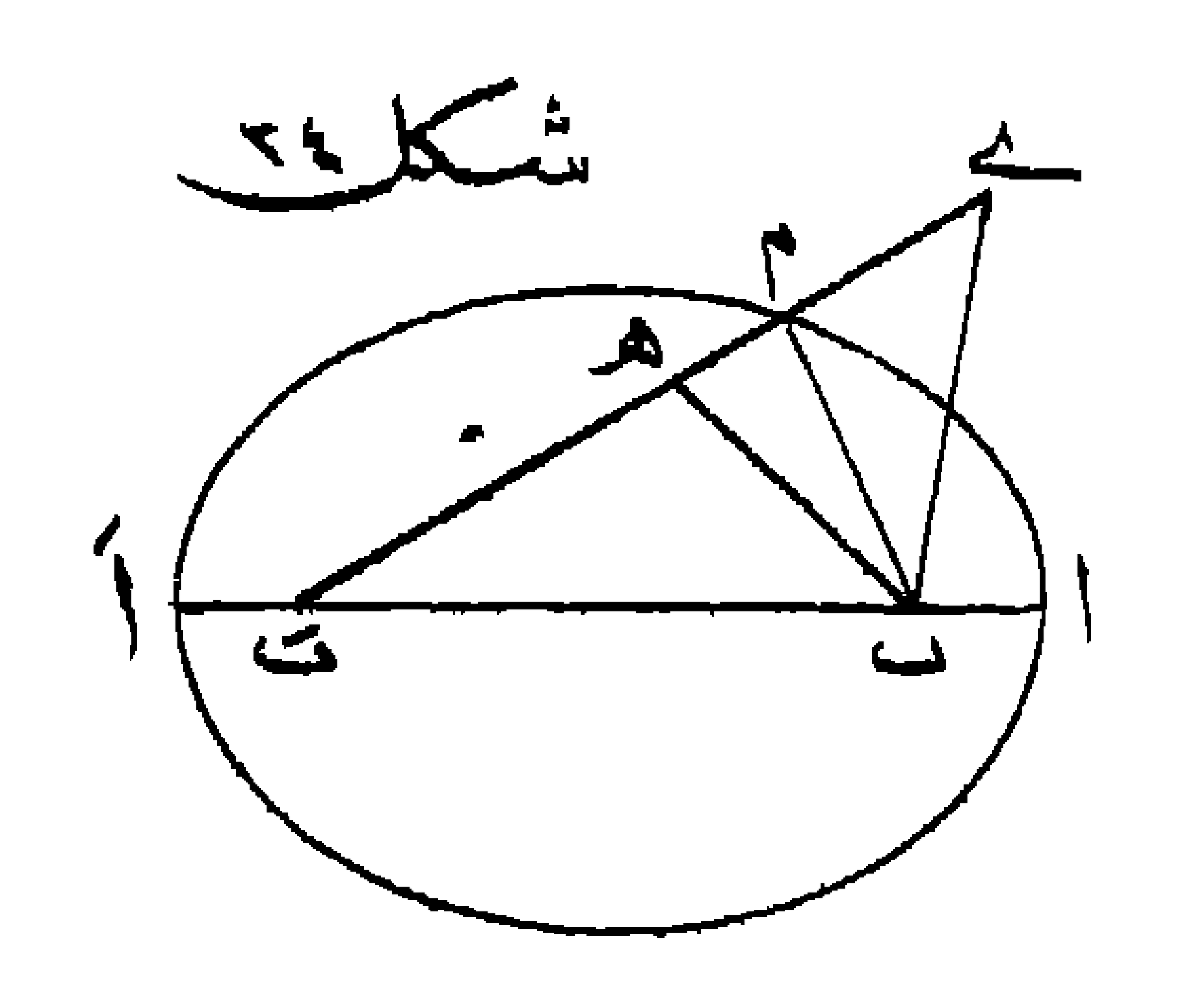
س ٣٨ الاختلاف المركزى — اذا زاد المحور الاصغر بدون ان يتغير المحور
الاكبر او صغر البعد بين البورتين بدون ان يتغير المحور الاكبر ايضا قرب المنحنى
شيأ فشيأ من أن يصير دائرة فاذا استمر تقارب البورتين من بعضهما حتى انطبقا
فمن البديهى أن المنحنى يصير دائرة
وبالعكس اذا بعد البورتان عن بعضهما صغر المحور الاصغر وآل القطع الناقص
فى نهاية الامر الى مستقيم وحينئذ يكون شكل القطع الناقص متعلقا فى آن
واحد بطول كل من المحور الاكبر والبعد بين البورتين
ونسبة البعد بين البورتين فى أى قطع ناقص الى محوره الاكبر تسمى الاختلاف
المركزى له بمعنى انه اذا رمز لها بحرف ف كان

$$ف = \frac{٢ح}{٢ء} = \frac{ح}{ء} = \frac{\sqrt{ء^٢ - ب^٢}}{ء}$$

ويظهر من ذلك حينئذ ان الاختلاف المركزى كمية أصغر من الواحد دائما

س ٣٩ القطع الناقص يصير معينا بالضرورة اذا علم كل من محوره الاكبر
واختلافه المركزى وقد جرت العادة بان تتوصل الفلكيون الى تعيين مدارات
الكواكب السيارة بواسطة هاتين الكميتين

س ٤٠ النظرية الرابعة — محيط القطع الناقص يقسم مستويه الى قسمين
أحدهما داخله والآخر خارج عنه بحيث يكون مجموع البعدين الواصلين
من أى نقطة من القسم الخارجى الى بورتيه أعظم من محوره الاكبر ومجموع
البعدين الواصلين من أى نقطة من القسم الداخل الى البورتين أصغر من
المحور المذكور
فلنعتبر اولا نقطة مثل ى (شكل ٢٤) موضوعة خارج القطع الناقص
ونصل منها الى البورتين ونقول من حيث أن هذه النقطة خارجة عن المنحنى
فمستقيما




فمستقيما ح ب , ح بَ الواصلان منها الى البورتين يقطعان محيط فى نقطتين ولتكن احداهما هى م فنصل م ب ويكون حينئذ

م ب + م بَ = ٢ ه

لكن من مثلث م ب ح يحدث

م ح + ب ح > م ب

فاذا اضفنا م بَ الى طرفى هذه المتباينة حدث

م بَ + م ح + ب ح > م ب + م بَ او

ح ب + ح بَ > ٢ ه

واما اذا اعتبرنا نقطة مثل هـ داخل محيط القطع الناقص ووصلنا منها الى البورتين بمستقيمين مثل هـ ب و هـ بَ ثم مددنا احدهما الى أن يتقابل مع المنحنى فى نقطة مثل م ووصل المستقيم م ب حدث من المثلث م هـ ب ان هـ ب < ب م + م هـ

وباضافة هـ بَ الى الطرفين يكون

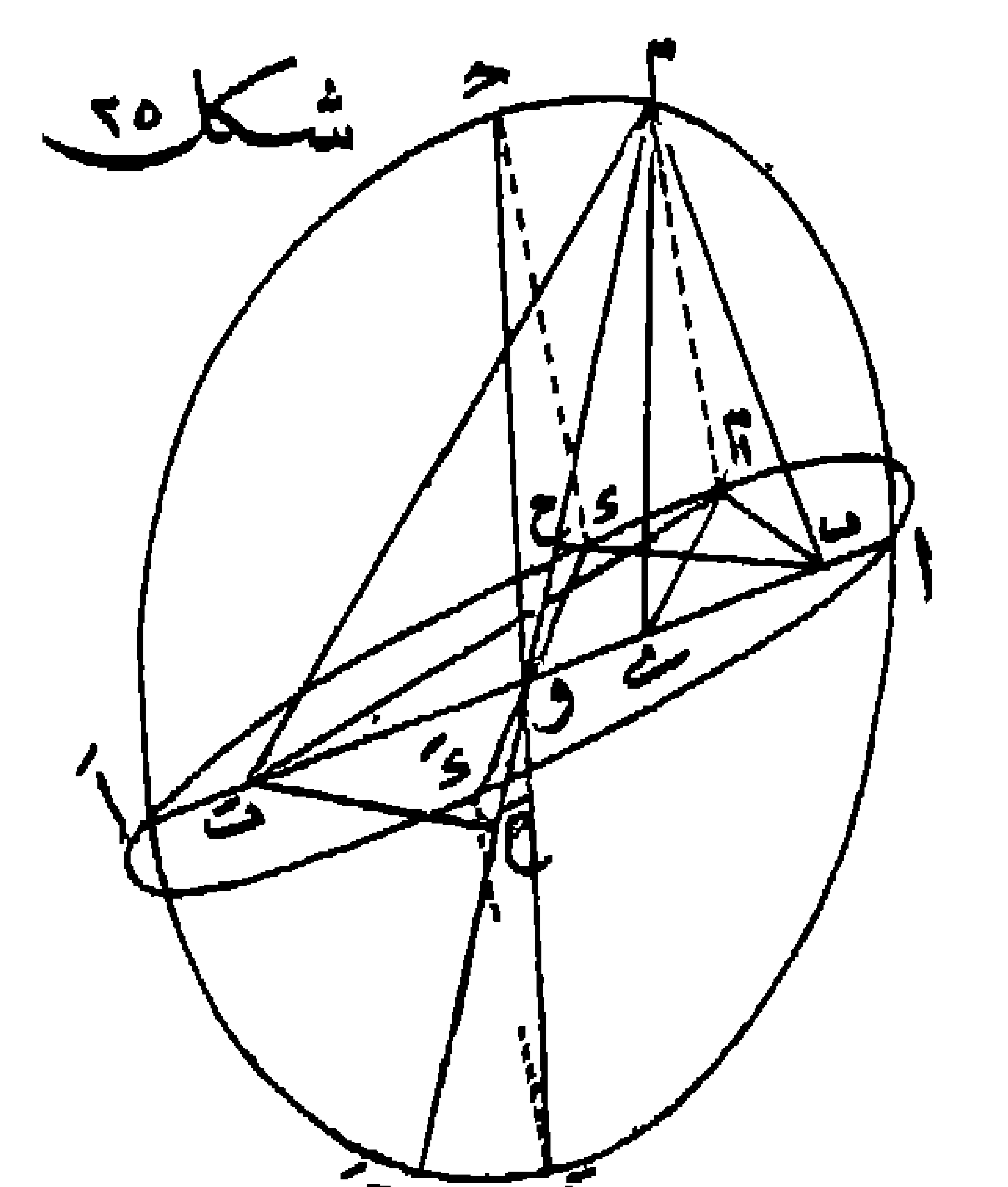
هـ ب + هـ بَ < ب م + م هـ + هـ بَ = ب م + م بَ = ٢ ه

وحينئذ فقد اتضح انه على حسب وضع النقطة خارج القطع الناقص أو على محيطه أو داخله يكون مجموع بعديها البورتين أكبر او مساويا أو أصغر من المحور الاكبر للقطع الناقص المذكور

١٤ـ النظرية الخامسة ـ القطع الناقص هو مسقط لدائرة مستويها مائل على مستويه

فاولا لا يخفى أن مسقط شكل ما (على مستوى مسقط معلوم) لا يتغير ابدا مهما حرك هذا المستوى بالتوازى لنفسه وحينئذ يسوغ لنا ان نأخذ مستوى المسقط مارا بمركز الدائرة

اذا تقرر ذلك لنفرض أن احـ اَحَ (شكل ٢٥) هى الدائرة المعلومة وأب مسقطها على المستوى المفروض هو المنحنى ا ء اَ ءَ وتثبت ان هذا المنحنى يكون قطعا ناقصا ولذلك يرسم داخل الدائرة قطر مثل حـ حَ عمودى على خط




تقاطع المستوى المعلوم بمستوى الدائرة وهو المستقيم ا اَ فيكون مسقط القطر المذكور وهو ءَ ءَ عمودا أيضا على المستقيم ا اَ ثم يؤخذ على ا اَ بعدا و ب ، و بَ مساويين الى ح ء ويوصل من نقطة حيثما اتفق من محيط الدائرة كالنقطة م مثلا الى نقطتى ب ، بَ وكذا من مسقطها وهو م الى نقطتى ب ، بَ ويوصل ايضا القطر م مَ

فاذا انزل الآن مستقيم م ے عموديا على ا اَ ووصل المستقيم م ے فبمقتضى ما هو مقرر فى نظرية الثلاثة أعمدة يكون المستقيم الاخير عمودا أيضا على ا اَ وبالتبعية لذلك تكون أضلاع مثلثى ح و ء ، م ے م متوازية على التناظر ويكون المثلثان المذكوران متشابهين وينتج من تشابههما ان نسبة

م م : ح ء :: م ے : ح و

وغير ذلك اذا انزلنا من نقطتى ب ، بَ عمودي ب ح ، بَ حَ على القطر م مَ كان مثلثا و ح ب ، و ے م متشابهين لانهما قائما الزاوية وفيهما الزاوية الحادة مشتركة فينتج منهما هذا التناسب

ح ب : و ب :: م ے : و م

لكن مستقيما و ب ، ح ء متساويان بالعمل وكذلك مستقيما و م ، و ح متساويان لانهما نصفا قطرى دائرة واحدة فتكون فى التناسبين السابقين ثلاثة حدود مشتركة وعلى ذلك يكون ح ب = م م

وينتج من ذلك أن المثلثين القائمى الزاوية م م ب ، م ح ب مشتركان فى الوتر وأن ضلعين منهما متساويان وبذلك يتساوى المثلثان ويكون

م ب = م ح

وكذلك حيث ان مثلثى م م بَ ، م حَ بَ مشتركان فى الوتر وفيهما ضلعان متساويان لان حَ بَ = ح ب = م م فيكونان متساويين وينتج منهما أن م بَ = م حَ

وغير ذلك

وغير ذلك من البديهي أن مستقيمي م حَ ، مَ ح متساويان ولهذا يكون

م ب + م ت = مَ ح + م حَ = م مَ = ا اَ

وحينئذ يكون المنحنى الحادث قطعا ناقصا بورتاه هما نقطتا ب ، ت

س ٤٢ د اذا رسم مستقيم في مستوي منحن ما وأنزل من احدى نقط هذا المنحنى عمود على هذا المستقيم سمي هذا العمود بالاحداثي الرأسي لهذه النقطة

اذا تقرر هذا فتنتج من النظرية السابق ذكرها النتيجة الآتية

(نتيجة) اذا علم قطع ناقص ودائرة قطرها هو المحور الاكبر لهذا القطع الناقص واعتبرنا نقطة من القطع الناقص والنقطة من محيط الدائرة التي تسقط معها في نقطة واحدة على المحور الاكبر كان بين احداثييهما الرأسيين نسبة ثابتة

ولبيان ذلك نتصور أن سطح الدائرة دار حول مستقيم ا اَ وانطبق على مستوي القطع الناقص فينطبق أيضا مستقيم ے م بالضرورة على مستقيم ے م
لكن حيث ان مثلثي و حـ ء ، ے م م متشابهان فينتج منهما أن نسبة

م ے : م ے :: و ء : و حـ :: ٯ : ٯ

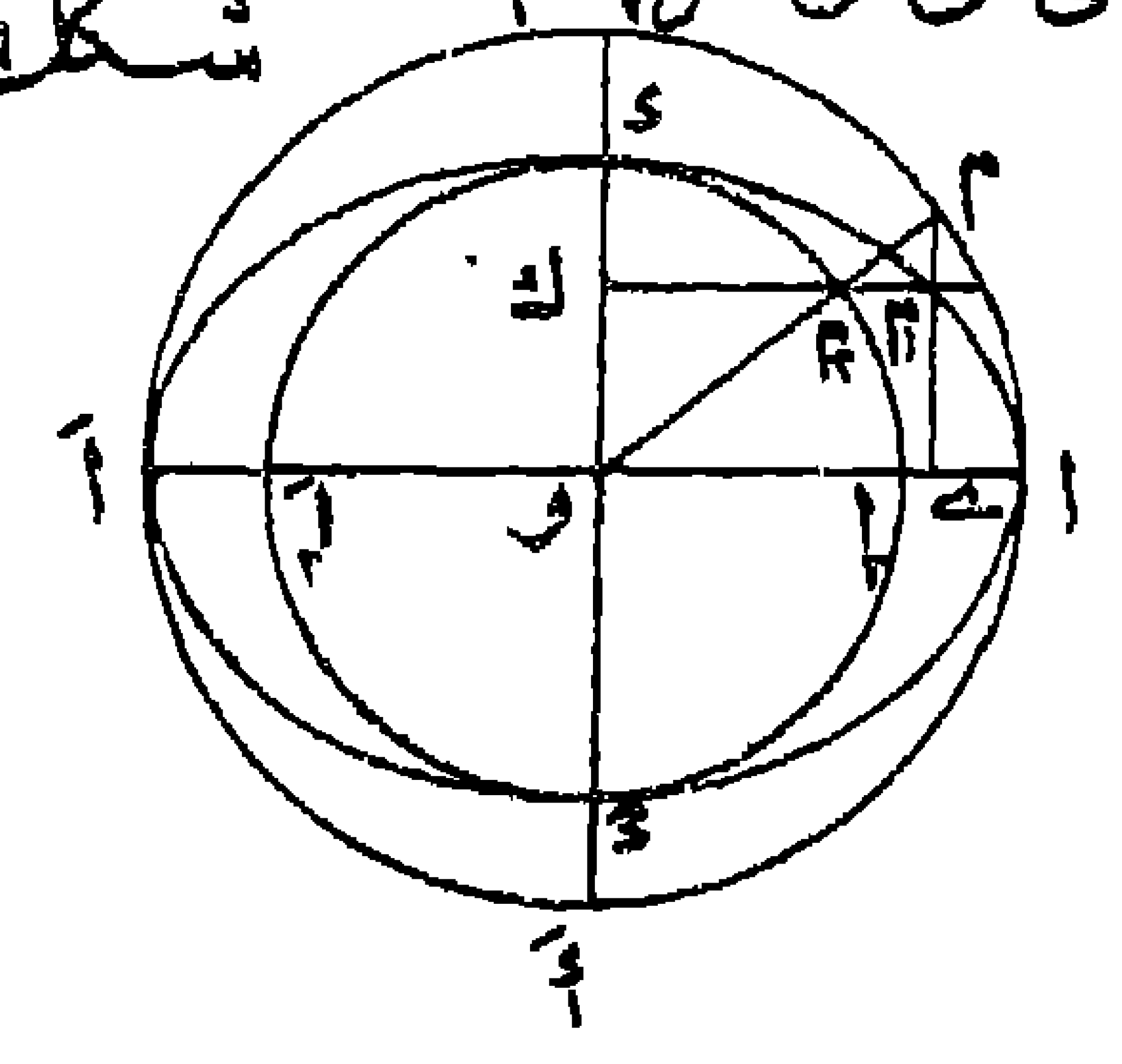
حينئذ يعلم أن نسبة الاحداثيين المتناظرين في كل من القطع الناقص والدائرة الى بعضهما كنسبة نصف المحور الاصغر الى نصف المحور الاكبر

(تنبيه) هذه النسبة متعلقة بميل مستويي المنحنيين على بعضهما لانه ينتج من مثلث و حـ ء أن

و ء = و حـ جتا حـ و ء أو

ٯ/ٯ = جتا حـ و ء

س ٤٣ د وتوجد هذه الخاصية بعينها في حالة ما اذا اعتبرت الاحداثيات العمودية على المحور الاصغر والدائرة المرسومة عليه أعني التي هو قطرها




لانه اذا رسم على المحور الاصغر والاكبر محيطا دائرتين متحدتي المركز كما في (شكل ٢٦) ثم أنزل من نقطة حيثما اتفق مثل نقطة م من القطع الناقص احداثي عمودي على المحور الاكبر كالاحداثي م ے ومد على استقامته الى ان يقابل

محيط الدائرة المرسومة على المحور الاكبر ثم وصل مستقيم وم حدث بمقتضى ما تقدم فى (ش ٤٢ د) ان نسبة

م ے : م ے :: ...  :: وم : وم

وينتج من ذلك ان مستقيم م م موازٍ الى المحور ا ا وبناء على ذلك يكون عموديا على م ے

اذا تقرر ذلك يحدث من مثلثى وم ے و وم ك المتشابهين ان نسبة

و ے : م ك :: و م : و م

أو نسبة

م ك : م ك :: ... : ...

وبناء على ذلك اتضح ان نسبة الاحداثيات الرأسية المتناظرة فى كل من القطع الناقص والدائرة المرسومة على المحور الاصغر الى بعضها كنسبة المحور الاكبر الى المحور الاصغر

ش ٤٤ د ويمكن جمع هاتين النظريتين فى منطوق واحد بأن يقال اذا علم قطع ناقص ومحيط الدائرة المرسومة على احد محوريه تكون النسبة بين الاحداثيات الراسية للقطع الناقص العمودية على المحور المشترك بينه وبين تلك الدائرة الى الاحداثيات المناظرة لها من الدائرة المذكورة كالنسبة بين القطرين العموديين على المحور المشترك

ش ٤٥ د طريقة اخرى لرسم القطع الناقص — ينتج من الخواص التى شرحناها طريقة سهلة لرسم القطع الناقص نقطة فنقطة ولذلك نرسم اولا المحورين ا ا ر ى ى (شكل ٢٦) ونرسم على هذين المحورين محيطى دائرتين ثم نرسم نصف قطر حيثما اتفق مثل وم ونسقط نقطة م بعمود على المحور الاكبر ونقطة م بعمود على المحور الاصغر فهذان العمودان يتقاطعان فى نقطة مثل م تكون نقطة من القطع الناقص لانه يفهم بداهة ان نسبة

م ے : م ے :: وم : وم :: ... : ...

وفى العادة لا تؤخذ انصاف الاقطار التى مثل وم بالاختيار بل الاحسن ان يقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية ويوصل من نقط التقاسيم الى المركز

ش ٤٦ د النظرية السادسة — اذا علم المحوران ا ا ر ى ى (شكل ٢٧) من قطع ناقص ثم اخذ مستقيم مثل حـ هـ و طوله الكلى حـ و مساو لنصف

المحور

المحور الاكبر ثم اخذ على ذلك المستقيم بالابتدا من نقطة و بعدكالبعد وه مساو لنصف المحور الاصغر ثم علمنا نقطة ه باشارة على المستقيم حه و لاجل ان تكون ثابتة عليه فاقول اذا حرك المستقيم حه وحركة اختيارية لكن بشرط ان تتحرك نهايته ح على المحور الاصغر وبشرط ان تتحرك نقطة ه الثابتة بالنسبة له على المحور الاكبر فان نهايته الاخرى تتحرك على منحنى القطع الناقص الذى محوراه هما اآ و ء ءَ

شكل ٢٧

يعنى انه اذا اخذ المستقيم المتحرك اوضاعا متجاورة كالاوضاع حه و و حَهَوَ وحًهًوً و.... الخ كانت النقط و وَ وً و... الخ نقطا من القطع الناقص المذكور

شكل ٢٨

وللبرهنة على صحة هذه النظرية بطرق الهندسة العادية نقول تقدم فى ش ٤٥ انه لرسم قطع ناقص محوراه معلومان كالمحورين اآ و ء ءَ (شكل ٢٨) يرسم على هذين المحورين دائرتان ثم نرسم نصف قطر حيثما اتفق مثل م ن ك ويرسم من نقطة ن افقى كالافقى ن و وينزل من نقطة ك راسى كالراسى ك و فيتقاطع مع الافقى فى نقطة مثل و وتكون هى نقطة من القطع الناقص المطلوب

اذا تقرر هذا ورسم من نقطة و مستقيم مثل وه موازى لنصف القطر ك ن م فانه يقطع اولا المحور الاكبر فى نقطة مثل ه بحيث يكون البعد وه مساويا لنصف المحور الاصغر وذلك لانه من متوازى الاضلاع وه م ن يعلم ان وه = ن م وبما ان ن م مساو الى ء م الذى هو نصف المحور الاصغر لكونهما نصفى قطر دائرة واحدة فيكون حينئذ وه = ء م اعنى مساويا لنصف المحور الاصغر

وثانيا اذا مد وه من جهة ه حتى يقطع المحور الاصغر فى نقطة مثل ح

فأقول ان وحـ يكون مساويا لنصف المحور الاكبر لانه يؤخذ من متوازى الاضلاع ك وحـ م أن وحـ = ك م

لكن بما أن ك م = ا م

فحينئذ يكون وحـ = ا م أعني مساويا الى نصف المحور الاكبر

فاذا فرضنا ان نصف القطر ك م انتقل من موضعه وأخذ وضعا آخر مثل كَ م وأجرينا عليه ما أجرى على نصف القطر ك م تعينت نقطة أخرى مثل وَ من القطع الناقص فاذا رسم منها مستقيم مثل وَهَحَ موازى الى كَ م لقطع المحورين في نقطتين مثل هَ ، حَ بحيث يكون وَهَ مساويا لنصف المحور الاصغر ويكون وَحَ مساويا لنصف المحور الاكبر

واثبات ذلك واضح من متوازى الاضلاع الجديد وهو كَ وَحَ م وهكذا كلما تغير وضع نصف القطر حدثت نقطة من القطع الناقص بحيث لو رسم منها موازٍ لنصف القطر المذكور يحدد عليه جزآن مساوٍ أحدهما لنصف المحور الاصغر والآخر لنصف المحور الاكبر

وعليه فيكون عكس ذلك صحيحا بمعنى أنه اذا تحرك المستقيم وهحـ الذى طوله الكلى وحـ مساو لنصف المحور الاكبر من القطع الناقص وطول جزئه وهـ مساو لنصف المحور الاصغر حركة بحيث لا تخرج نقطته حـ عن المحور الاصغر ونقطته هـ عن المحور الاكبر لزم أن تكون جميع الاوضاع التي تأخذها نهايته الثانية و موجودة على القطع الناقص وهو المطلوب

(تنبيه) اعلم ان لهذه النظرية اثباتا آخر معلوما فى علم تطبيق الجبر على الهندسة وهو الاثبات المشهور والمستعمل فى جميع كتب المنحنيات لكن بما أن كتابى هذا موضوع لتلامذة التجهيزية على الاخص وتلامذة هذه المدرسة لم يكن سبق لهم دراسة علم تطبيق الجبر على الهندسة قد التزمت لأجل أن لا أحرمهم من مزايا هذه النظرية الجميلة التى قد اسس عليها برجل القطع الناقص بأن أبحث لهم على اثبات لهذه النظرية لم يكن مبنيا الا على الهندسة العادية التى هى من ضمن معارفهم فساعدتنى الفكرة لحسن حظهم ووجدت لهم الاثبات المتقدم الذى لم يكن مبنيا الا على خاصية متوازى الاضلاع

ـــ ٤٧ ـــ طريقة رسم القطع الناقص بشريط من الورق أو بالمسطرة ـــ

ينتج من النظرية السابقة طريقة لرسم القطع الناقص بواسطة شريط من ورق ان كان المراد رسمه على فرخ من الورق او بواسطة مسطرة من الخشب ان كان المراد رسمه على حائط كما تفعل طائفة النجاتين حينما يريدون رسم عقد اسطوانى دليله قطع ناقص وبيان هذه الطريقة هو الآتى

شكل ٢٩

وذلك ان يعلم بالقلم على حرف شريط الورق أو المسطرة ثلاث نقط مثل و ، هـ ، حـ شكل ٢٩ بحيث يكون بعد وحـ = ا م اى نصف المحور الاكبر وان يكون بعد وهـ = م ء اعنى نصف المحور الاصغر ومن ذلك يكون حـ هـ مساويا للفرق بين نصفى المحورين

فاذا حرك الشريط او المسطرة بشرط ان لا تخرج نقطة هـ عن المحور ا اَ ونقطة حـ عن المحور ء ءَ فبنا على ما ثبت فى سـ ٤٦ـد يعلم ان نقطة و تتحرك على القطع الناقص فاذا علم بالقلم على سطح الورق الذى يراد الرسم عليه مواضعها المختلفة المتتالية تحصلت عدة نقط على قدر اللزوم من القطع الناقص فتجمع بمنحن متصل ويكون هو المنحنى المطلوب

ملحوظة مفيدة — حيث انه اذا جعلت نقطة حـ مركزا وبنصف قطر مساو للفرق بين نصفى المحورين رسمنا قوس دائرة فانه يقطع المحور الاكبر بالضرورة فى نقطة هـ بحيث اذا وصل من حـ الى هـ بمستقيم واخذ عليه بعد هـ و مساويا لنصف المحور الاصغر كانت نقطة و من القطع الناقص فحينئذ يمكن جعل هذه الكيفية طريقة لرسم القطع الناقص بتغيير مركز القوس من نقطة حـ الى نقطة اخرى ومن هذه الى اخرى وهلم جرا حتى تتعين النقط الكافية

سـ ٤٨ـد برجل القطع الناقص — برجل القطع الناقص هو آلة بواسطتها يمكن رسم القطع الناقص دفعة واحدة بالاستمرار وهو مؤسس على النظرية التى تقررت فى سـ ٤٦ـد وهاك وصفه

يتركب هذا البرجل من مسطرتين عمود يتين على بعضهما من وسطيهما ومرتبطتين ببعضهما ارتباطا ثابتا وبكل مسطرة منهما شق مصنوع فى وسطها

ومتجه في جميع طولها بحيث عند رسم القطع الناقص توضع الالة بشرط ان يكون محورا الشقين اللذين بالمسطرتين منطبقين على المحورين ا اَ , ء ءَ شكل ٣٠ من القطع الناقص الذي يراد رسمه ثم من ذراع مثل حـ ل عليه مقبضان مثل و , هـ يمكن تثبيتهما في نقطتين حيثما اتفق من الذراع وفي المقبض هـ يوجد أصبع أو سن ينزلق بطول شق المسطرة اَ واما المقبض و فان فيه محلا لوضع سن قلم الرسم الذي به يرسم القطع الناقص بتحريك الذراع حـ ل ويوجد في النهاية حـ من الذراع حـ و حامل ذو أصبع ينزلق في شق المسطرة ء ءَ فاذا ثبتنا المقبضين هـ , و بحيث صار البعد حـ و = م ا , هـ و = م ء ثم وضعنا المسطرتين بحيث يكون محورا شقيهما منطبقين على محوري القطع الناقص كما تقدم وحرك الذراع حـ ل فان نقطة حـ لا تزال تتحرك على المحور ء ءَ ونقطة هـ على المحور ا اَ واما نقطة و فانها ترسم بالضرورة قطعا ناقصا وذلك بنا على بند ٤٦

بند ٤٩ (طريقة اخرى لرسم القطع الناقص بواسطة المسطرة أو شريط من ورق) غاية هذه الطريقة ان يؤخذ شريط من ورق أو مسطرة ويعلم عليها ثلاث نقط مثل هـ , و , حـ شكل ٣١ بحيث يكون بعد هـ و مساويا لنصف المحور الاصغر ء ءَ وبعد و حـ مساويا لنصف المحور الاكبر ا اَ من القطع الناقص الذي يراد رسمه ثم تحرك المسطرة لكن بشرط ان لا تخرج نقطة حـ عن المحور الاصغر وامتداده وان تتحرك نقطة هـ على المحور الاكبر وامتداده ويعلم على سطح الورق الذي يراد رسم القطع الناقص عليه جميع الاوضاع التي تاخذها نقطة و فتكون هذه الاوضاع نقطا من القطع الناقص

شكل ٣٠



شكل ٣١

وفي الواقع لاننا اذا فرضنا ان القطع الناقص مرسوم من قبل بالطريقة المقررة في ش٤٠ د بمعنى انه من بعد رسم نصف القطر م ه ك انزلنا من نقطة ك الراسي ك و ل ومن نقطة ه رسم الافقي ع ه و الذى يقطع الراسي المتقدم في نقطة و التي تكون بموجب ما تقدم نقطة من القطع الناقص فاذا رسم الآن من نقطة و مستقيم كالمستقيم حـ و هـ صانع مع المحور الاكبر للقطع الناقص زاوية مثل و هـ م مساوية للزاوية ك م هـ الواقعة بين ذلك المحور وبين نصف القطر لكان هذا المستقيم صانعا بالضرورة مع المحور الاصغر زاوية مثل و حـ م = ك م حـ ويكون جزؤه الاسفل و هـ مساويا لنصف المحور الاصغر وجزؤه الاعلى و حـ مساويا لنصف المحور الاكبر

وفي الواقع لاننا اذا انزلنا من نقطة ه عمود ه ع على ا ا َ حدث مثلث ه ع م القائم الزاوية في ع مساويا للمثلث و ل هـ القائم الزاوية في ل لان فيهما ضلع ه ع = و ل وزاوية ه م ع = و هـ ل بالعمل فتكون الزاوية الثالثة م ه ع من المثلث الاول مساوية لنظيرتها ل و هـ من المثلث الثاني وحينئذ فيكون مثلث ه م ع = و ل هـ ومن تساويهما يكون و هـ = ه م = د م وهو برهان الجزء الاول

وثانيا اذا نظرنا الى مثلثى ك ل م ر حـ عَ و القائمى الزاوية وجدنا ان فيهما ضلع ل م مساو لضلع و عَ وزاوية ك م ل = حـ و عَ فتكون الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية لنظيرتها من المثلث الثاني وعليه فيكون هذان المثلثان متساويين وينتج من تساويهما ان و حـ = ك م = ا م وهو المطلوب الثاني

فاذا تصورنا ان نصف القطر انتقل من وضعه الى وضع آخر تعينت نقطة أخرى من القطع الناقص بحيث اذا رسم من تلك النقطة مستقيم صانع مع المحورين زاويتين مساويتين للزاويتين الواقعتين بين نصف القطر في وضعه الجديد وبين المحورين المذكورين كان جزؤه الاسفل مساويا لنصف المحور الاصغر وجزؤه الاعلى لنصف المحور الاكبر وهكذا

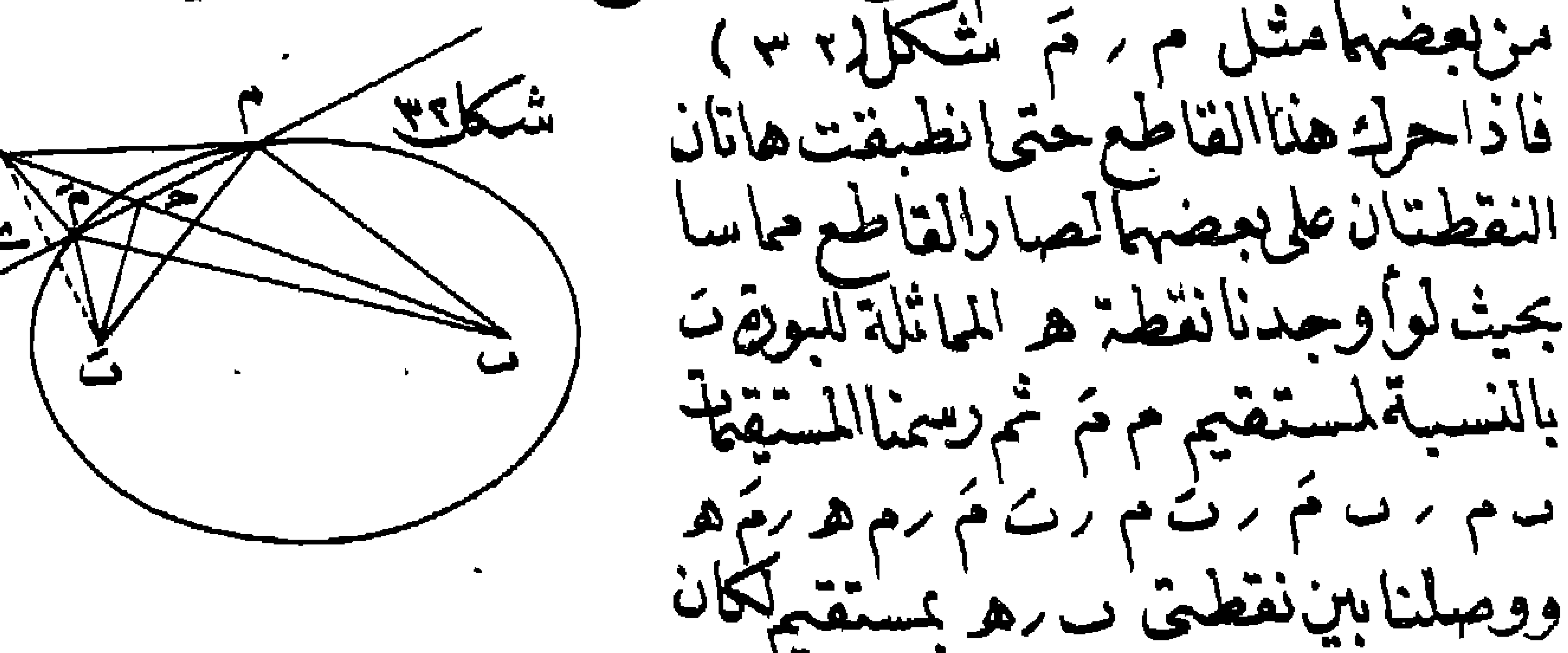
وبما ان هذه النظرية لا تزال موجودة في اى وضع اخذه المستقيم حـ و هـ المتغير

تبعا لتغير نصف القطر فيكون حينئذ عكسها صحيحا على الدوام بمعنى انه اذا
تحرك المستقيم حـ و هـ بحيث لا تخرج نقطة هـ عن المحور ا اَ ونقطة حـ عن
المحور ى ىَ لزم ان تتحرك نقطته المتوسطة و هى و على منحنى القطع الناقص
وهذا هو ما أردنا بيانه

# الفصل الثانى

## فى المماس للقطع الناقص والعمودى عليه واقطاره

نشد النظرية السابعة — المستقيم المماس للقطع الناقص يصنع مع
نصفى القطرين البوريين الواصلين الى نقطة التماس زاويتين متساويتين
ولبيان ذلك يعتبر مستقيم قاطع لمحيط القطع الناقص فى نقطتين قريبتين
من بعضهما مثل م ، مَ شكل (٣٢)




فاذا حرك هذا القاطع حتى انطبقت هاتان
النقطتان على بعضهما لصار القاطع مماسا
بحيث لو أوجدنا نقطة هـ المماثلة للبورة بَ
بالنسبة لمستقيم م مَ ثم رسمنا المستقيمات
ب م ، ب مَ ، بَ م ، بَ مَ ، م هـ ، مَ هـ
ووصلنا بين نقطتى ب ، هـ بمستقيم لكان
هذا المستقيم قاطعا للقاطع م مَ فى نقطة مثل حـ ويكون المستقيمان
م بَ ، م هـ متساويين لكونهما مائلين متساويى البعد عن موقع العمود
م ى ويكون كذلك المستقيمان مَ بَ ، مَ هـ وبناء على ذلك يكون الخطان المنكسران
ب م هـ ، ب مَ هـ مساويين الى الخطين المنكسرين ب م بَ ، ب مَ بَ بمعنى ان مجموع
طوليهما مساو الى ٢ ق ولكن حيث كان مستقيم ب هـ أقصر من كل من المنكسرين
ومستقيم هـ حـ = حـ بَ لنفس هذا السبب المتقدم فيكون حينئذ

ب هـ = ب حـ + حـ بَ

واخيرا نكون ب حـ + حـ بَ < ٢ ق

وحينئذ تكون نقطة حـ داخل محيط القطع الناقص وواقعة بين نقطتى
م ، مَ مهما كان وضع القاطع وعلى هذا اذا تحركت هاتان النقطتان واقتربتا
من بعضهما الى ان انطبقتا فنقطة حـ تنطبق عليهما ويصير المستقيمان حـ ب

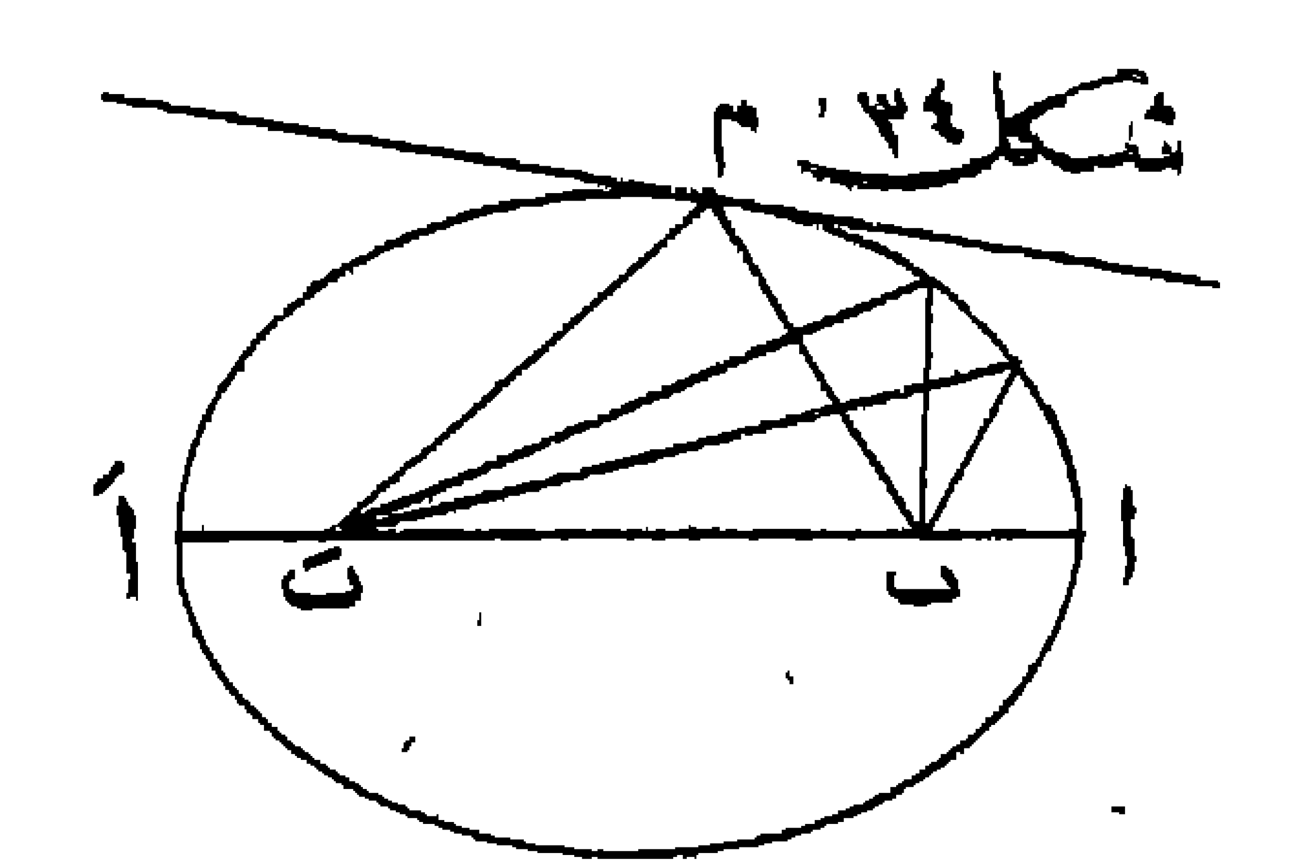
، حـ ت نصفي القطرين البوريين لنقطة التماس
اذا تقرر ذلك يلاحظ انه في جميع أوضاع نقطة حـ يكون مثلثا حـ ى هـ
، حـ ى ت متساويين وبناءً عليه تكون زاويتا ى حـ هـ ، ت حـ ى
متساويتين ايضاً وغير ذلك حيث ان زاويتي ى حـ هـ ، م حـ ب متساويتان
لانهما متقابلتان بالرؤس فتكون زاويتا ت حـ ى ، م حـ ب متساويتين
وهذا التساوي يحصل ايضاً بالضرورة عندما يصير القاطع م مَ مماساً
وبذلك يثبت المطلوب

س ٥١ د نتيجة المستقيم العمودي على منحنى القطع الناقص في نقطة من محيطه
يكون قاسماً للزاوية الواقعة بين نصفي قطريها البوريين الى قسمين متساويين
مثلاً ليكن ط طَ شكل (٣٣) هو المماس للقطع الناقص في نقطة م
فاذا رسم العمودي على المنحنى في هذه النقطة وهو م هـ اقول ان هذا العمودي
منصف لزاوية ب م ت وفي الواقع لانه ينتج من النظرية السابقة ان زاويتي
ط م ب ، طَ م ت متساويتان وعليه تكون زاوية ب م هـ المتممة
لزاوية ط م ب مساوية لزاوية
ت م هـ المتممة لزاوية طَ م ت
وهو المطلوب



س ٥٢ د (في المرايات الناقصية)
خاصية القطع الناقص التي ذكرناها
حالاً هي السبب الوحيد في تسمية
نقطتي ب ، ت بالبورتين المتناظرتين
وذلك انه من المقرر في علم الطبيعة
انه اذا صادمت كرة مرنة حاجزاً مرناً أيضاً تغير اتجاهها بعد المصادمة فتتبع
اتجاهاً آخر بحيث تكون زاوية السقوط مساوية لزاوية الانعكاس بمعنى ان
الاتجاهين اللتين تسير عليهما تلك الكرة قبل المصادمة وبعدها يصنعان مع
العمودي المقام على سطح الحاجز المرن من نقطة المصادمة زاويتين متساويتين
وكذلك ينعكس كل من الاهتزازات الصوتية والاشعة الحرارية والضوئية
تبعاً لنفس هذا القانون

فاذا تصورنا حينئذ قطعا ناقصا مصنوعا من شريط أو صفيحة قليلة العرض مأخوذة من جسم مرن بمعنى انه صار تشكيل هذه الصفيحة على هيئة قطع ناقص فصارت تشبه حرفا الصّنيه ثم قذفت كرة مرنة من نقطة ب في اتجاه حيثما اتفق مثل ب م شكل (٣٤) فانها تمر بعد المصادمة بنقطة بَ




وكذلك اذا فرض ان كرة اخرى قد قذفت من نقطة بَ مرت بعد المصادمة بنقطة ب وأيضا اذا ارتج جسم رنان في نقطة ب انعكست ارتجاجاته الصوتية على سطح القطع الناقص وتجتمع في نقطة بَ بحيث يسمع الصوت في هذه النقطة اكثر من غيرها وكذلك اذا فرض ان الصفيحة مصقولة من الداخل ووضع في نقطة ب ينبوع حراري فان الاشعة الخارجة منه تجتمع بعد انعكاسها على سطح هذه الصفيحة في نقطة بَ بحيث اذا وضع الترمومتر في هذه النقطة اظهر ان فيها درجة حرارة مرتفعة عن الدرجات التي في غيرها من النقط وتكون الحرارة في نقطة بَ كما لو كان ينبوع الحرارة موضوعا فيها ويحصل مثل ذلك ايضا اذا كان الينبوع موضوعا في نقطة بَ والترمومتر في نقطة ب فلجميع هذه الاسباب قد سميت نقطتا ب , بَ بالبورتين المتناظرتين

واذا وضعت في نقطة ب نقطة ضوئية فان الاشعة الخارجة منها تنعكس على الحاجز الناقصي وتجتمع في نقطة بَ بحيث ان العين الموضوعة في نقطة بَ تحس بالضوء كما اذا كانت النقطة المضيئة موجودة في نفس هذه النقطة

٥٣ — النظرية الثامنة — المحل الهندسي لمساقط بورتي قطع ناقص على جميع المماسات لمحيطه هو محيط دائرة قطرها المحور الاكبر لهذا القطع الناقص لانه لا يخفى ولا أن مسقط نقطة على مستقيم هو موقع العمود النازل منها على هذا المستقيم

فاذا تقرر هذا ينزل من البورة ب شكل (٣٥) عمود مثل ب ى على مماس حيثما اتفق مثل ى ى ويمد على استقامته حتى يتلاقى مع نصف قطر البوري

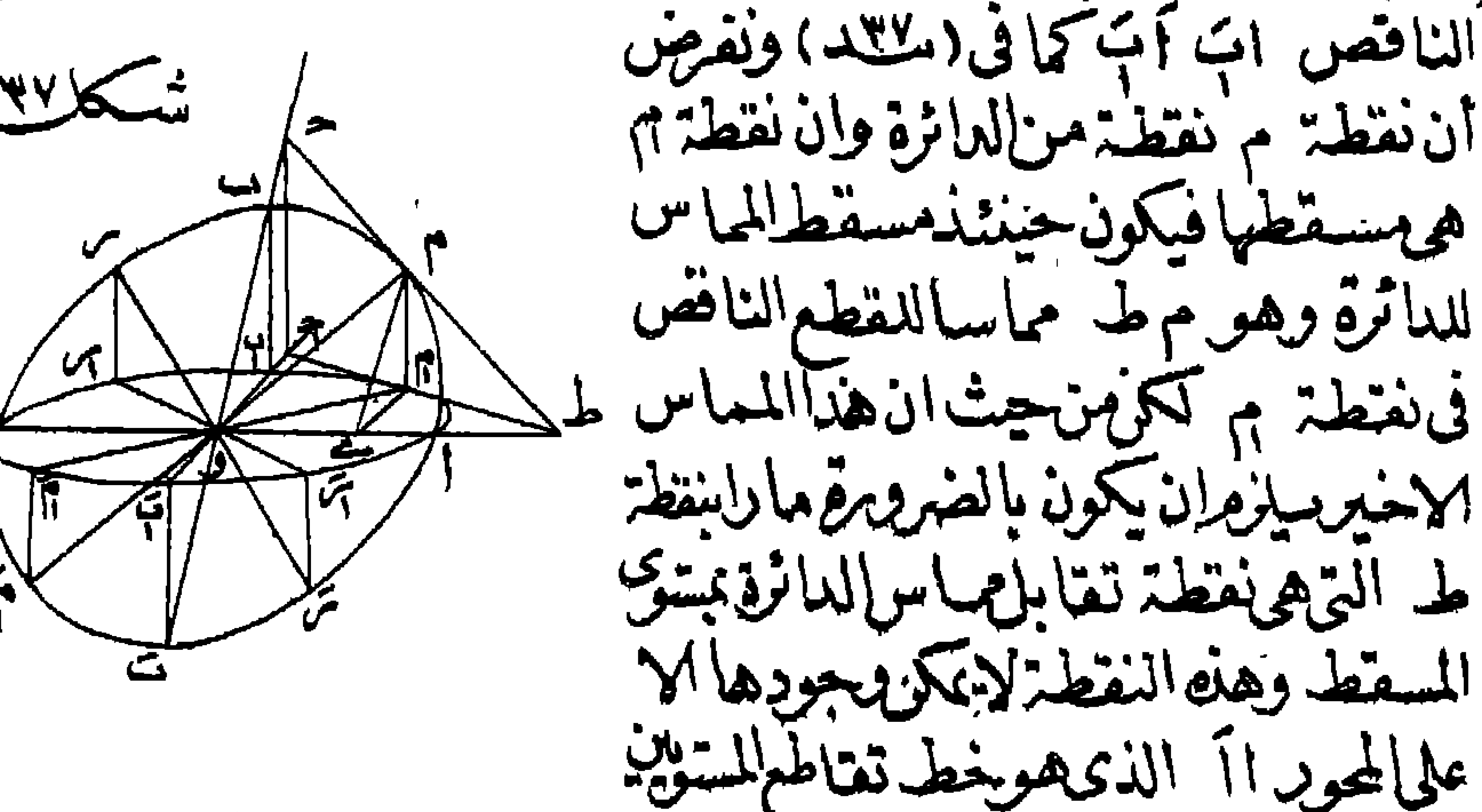
ت م في نقطة مثل نقطة هـ فيكون خطا م ب ، م هـ متساويين
لان المماس منصف لزاوية ب م هـ
بمقتضى (شد) وعلى هذا يكون طول
المستقيم ت هـ مساويا الى ٢ ح
لكن من حيث ان خط و ى الواصل
من مركز القطع الناقص الى مسقط
البورة على المماس مار بمنتصف كل من

شكل ٣٥

ب ت ، ب هـ اللذين هما ضلعا المثلث ت ب هـ فيكون حينئذ هذا الخط
موازيا الى ضلعه الثالث ومساويا لنصف طوله بحيث يكون و ى = ح
وعلى هذا يكون بعد نقطة ى التى هى مسقط البورة عن مركز القطع الناقص
ثابت الطول ومساويا لنصف المحور الاكبر وبهذا تثبت النظرية المتقدمة
وهذه الدائرة تسمى غالبا بالدائرة الاصلية للقطع الناقص ومن المشاهد انها
مساوية للدائرة التى مسقطها هو القطع الناقص كما فى (شد)
شد فى دائرة الاستدلال — دائرة الاستدلال هى دائرة معرفتها مهمة
جدا لانها تستعمل كثيرا فى رسم مماسات القطع الناقص وهى الدائرة التى ترسم
بجعل احدى بورتى القطع الناقص مركزا وبنصف قطر مساو الى ٢ ح
وبنا على ذلك يعلم انه يوجد لكل قطع ناقص دائرتا استدلال متميزتان
شهد تعريف آخر للقطع الناقص — من المعلوم أن بعد أى نقطة عن محيط
دائرة يحسب على المستقيم الواصل من تلك النقطة الى مركز هذه الدائرة
فاذا تقرر هذا فلتكن نقطة م شكل (٣٦) نقطة حيثما اتفق من محيط القطع
الناقص ويوصل منها الى البورتين بنصفى القطرين البوريين ب م ، ت م
اللذين يمد ثانيهما على استقامته حتى يتلاقى مع دائرة الاستدلال التى
مركزها نقطة ت فيكون بالضرورة م هـ = م ب
وعلى هذا يرى ان نقطة م متساوية البعد عن كل من نقطة ب ومحيط هذه
الدائرة فيمكن حينئذ ان يعرف القطع الناقص بتعريف جديد بأن يقال القطع
الناقص منحن جميع نقطه متساوية البعد عن محيط دائرة وعن نقطة موضوعة
داخلها

سـ٥٦ـد قد يمكن بالسهولة ان تستخرج من هذا التعريف طريقة جديدة لرسم القطع الناقص لكنها تكون اقل بساطة وسهولة من الطرق التى ذكرناها قبل الآن فلذا لم نطل الكلام عليها زيادة عن ذلك

شكل ٣٦




سـ٥٧ـد النظرية التاسعة

اذا رسم مستقيمان مماسان للقطع الناقص ولدائرته الاصلية فى نقطتين مسقطهما على المحور الاكبر واحد كان هذان المماسان متلاقيين مع هذا المحور فى نقطة واحدة

ولاثبات ذلك نعتبر الدائرة ا ب اَ بَ شكل (٣٧) التى مسقطها هو القطع الناقص ا بَ اَ بَ كما فى (سـ٣٧ـد) ونفرض ان نقطة م نقطة من الدائرة وان نقطة مَ هى مسقطها فيكون حينئذ مسقط المماس للدائرة وهو م ط مماسا للقطع الناقص فى نقطة مَ لكن من حيث ان هذا المماس الاخير يلزم ان يكون بالضرورة مارا بنقطة ط التى هى نقطة تقابل مماس الدائرة بمستوى المسقط وهذه النقطة لا يمكن وجودها الا على المحور اَا الذى هو خط تقاطع المستويين

شكل ٣٧

فنعلم حينئذ ان هذين المماسين تلاقيا فى نقطة واحدة على المحور فاذا طبق الآن مستوى الدائرة على مستوى المسقط انطبقت هذه الدائرة على الدائرة الاصلية للقطع الناقص واخذ مستقيم م الاتجاه ب مَ بشرط ان يكون مسقط نقطتى م ، مَ على المحور الاكبر واحدا فمن حيث ان نقطة ط لم تتغير موضعها لانها موجودة على محور الدوران يثبت المطلوب حينئذ من ان المماسين لا يزالان متلاقيين فى هذه النقطة وهذا هو ما اردنا بيانه

سـ٥٨ـد

ش٥د وهذه الخاصية توجد أيضا بالنسبة الى المحور الاصغر فى حالة ما اذا اعتبرنا نقطتين مسقطهما على هذا المحور واحد احداهما من نقط القطع الناقص والاخرى من نقط الدائرة التى قطرها المحور المذكور

فاذا فرض مثلا ان و ر ، و هـ شكل (٣٨) نصف قطرهما حيثما اتفق ثم رسمنا مماسى هـ ط ، ر ك المتوازيين لكل من الدائرة الاصلية والدائرة المرسومة على المحور الاصغر حدث من ذلك مثلثان متشابهان ينتج منهما هذا التناسب

شكل ٣٨

و ط : و ك :: و هـ : و ر :: ن : نَ

وفى هذا التناسب ن ، نَ رمزان لنصفى المحورين

فاذا وصل الآن مستقيم ط ح وانزل مستقيم ر س عموديا على المحور الاصغر حدث بالضرورة هذا التناسب الآتى

م س : ر س :: و ط : و ك :: ن : نَ

وبناء على ذلك تكون نقطة م بمقتضى بند (٤٤) نقطة من القطع الناقص لكن حيث ان مستقيم ط م هو بمقتضى النظرية السابقة المماس لهذا القطع الناقص فى نقطة م فحينئذ يعلم ان هذا المماس متلاق مع المماس ك ر على امتداد المحور الاصغر وهذا هو ما أردنا بيانه

(تنبيه) يستنتج من البرهان السابق ومن القضايا المبرهنة فى بندى (٤٢) و (٤٣) ان المستقيم هـ م عمودى على المحور الأكبر

ويمكن التعبير عن هاتين الخاصيتين المهمتين جدا فى العمل بمنطوق واحد وهو المنطوق الآتى

اذا علم قطع ناقص والدائرة التى قطرها احد محوريه أقول ان مماسى هذين المنحنيين فى نقطتين مسقطهما على المحور المشترك واحد يتقاطعان فى نقطة واحدة على هذا المحور المشترك

ند ٥٩ نتيجة — نصف المحور في القطع الناقص هو وسط متناسب بين البعدين الواصلين من مركزه الى مسقط نقطة تماس أى مماس كان على المحور والى نقطة تقابل هذا المماس بالمحور المذكور

وفي الواقع لانه ينتج من مثلث وهط القائم الزاوية أن

$$\overline{وه}^2 = \overline{وا}^2 = وى \times وط$$

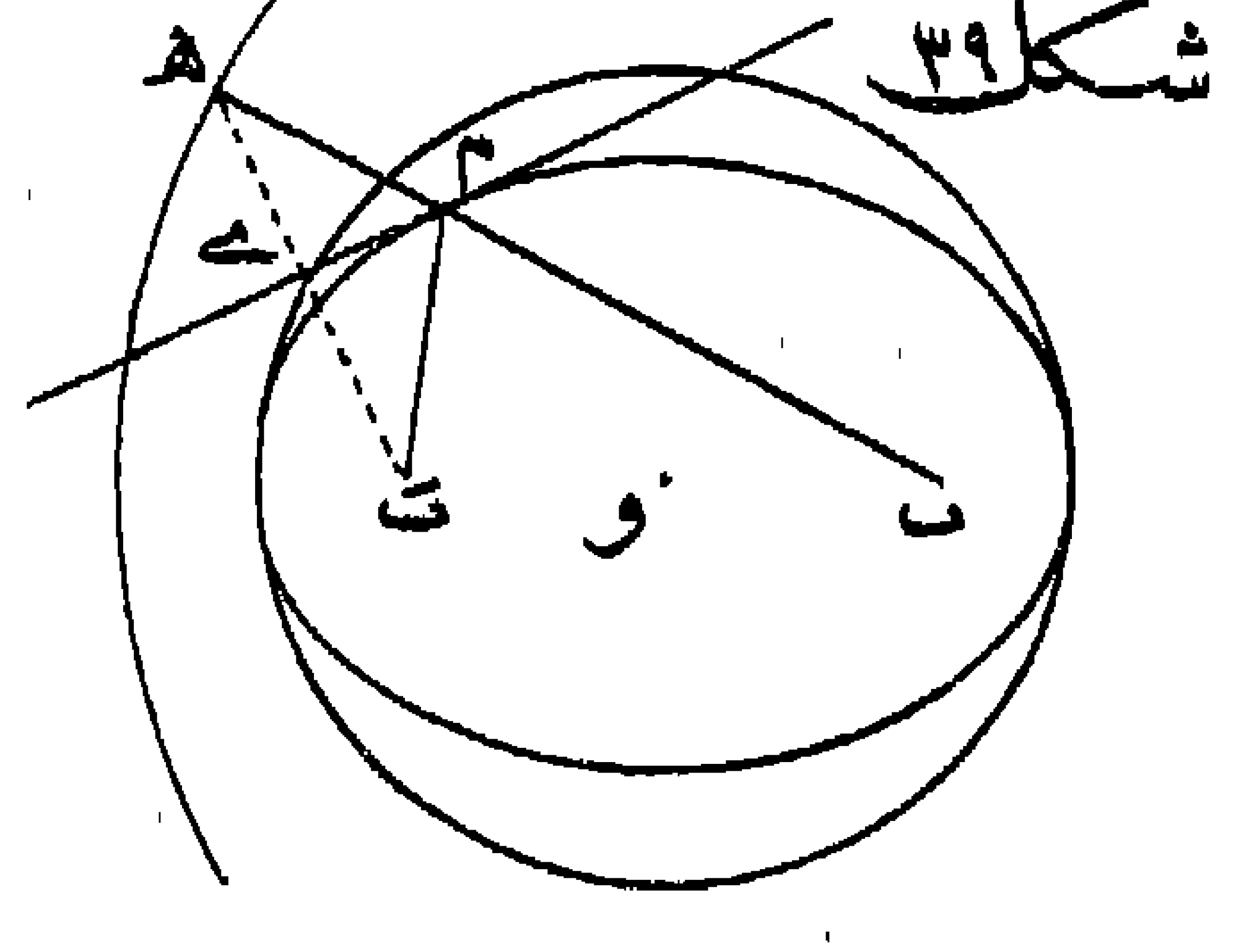
وبالمثل ينتج من مثلث وبح القائم الزاوية أن

$$\overline{وب}^2 = \overline{وى}^2 = وس \times وح$$

ند ٦٠ (في رسم مماسات القطع الناقص) الخواص المتنوعة التي ذكرناها آنفا تساعد على ايجاد طرق هندسية بسيطة جدا لحل الثلاث مسائل الاصلية التي توجد في البحث عن مماسات القطع الناقص

## المسئلة الاولى

المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع ناقص من نقطة معلومة على محيطه




(الطريقة الاولى) لتكن نقطة م شكل ٣٩ شكل (٣٩) هي النقطة المعلومة فأقول اذا وصل ب م , بَ م كان المماس المطلوب هو المستقيم المنصف لزاوية بَ م ه

وحينئذ فيسهل ايجاده بتنصيفها لا غير لكنه يمكن الاستغناء عن ايجاد هذا المستقيم المنصف للزاوية برسم دائرة الاستدلال والدائرة الاصلية وبعد ذلك يكفي ان نمد مستقيم ب م حتى يتقابل مع محيط دائرة الاستدلال في نقطة مثل ه ثم نصل مستقيم بَ ه فيكون المماس المطلوب هو المستقيم الواصل من نقطة م الى نقطة ى التي هي نقطة تقابل مستقيم بَ ه بمحيط الدائرة الاصلية

(الطريقة الثانية) ينتج من النظرية التاسعة المذكورة في ند ٥٧ طريقة أخرى لحل نفس هذه المسئلة فمثلا لتكن نقطة م شكل (٤٠) هي النقطة المعلومة

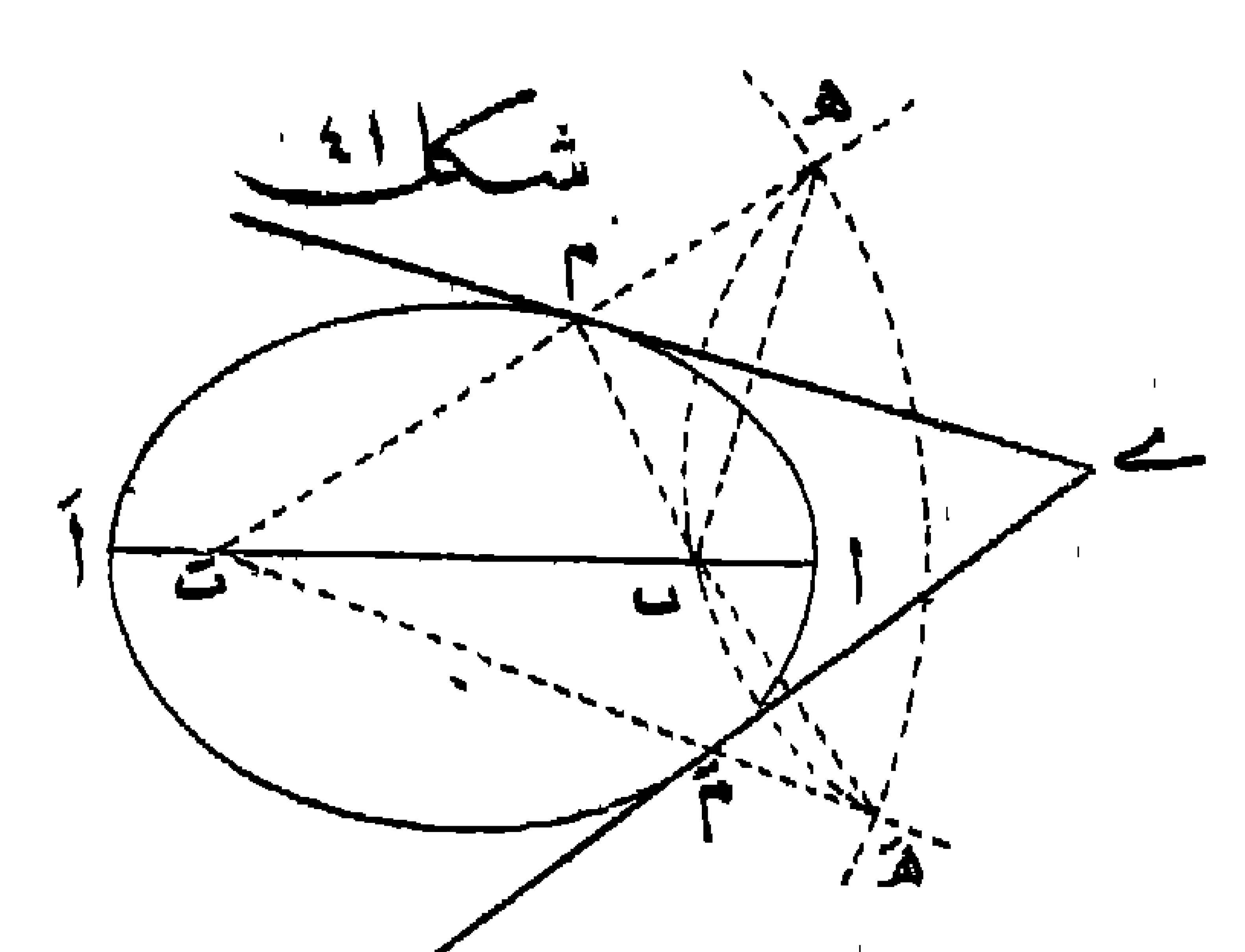
فينزل احداثى هذه النقطة وهو م ے ثم يمد على استقامته حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية فى نقطة مثل نقطة هـ ويرسم من هذه النقطة مستقيم مماس لهذه الدائرة فهذا المماس يقطع المحور اا فى نقطة مثل نقطة ط اذا وصل منها الى نقطة م بمستقيم ط م كان هو المماس المطلوب

شكل ٤٠

من الجائز أن تقع نقطة ط بعيدة جدا فيترتب على ذلك تقاطع المستقيمين اا و هـ ط على زاوية حادة جدا فلا تتعين نقطة تقاطعهما بالضبط أو ربما وقعت النقطة المذكورة خارج حدود الرسم بالكلية ففى كلتا هاتين الحالتين تستعوض الدائرة الاصلية بدائرة قطرها المحور الاصغر ويستعوض الاحداثى م ے بالاحداثى م س العمودى على المحور الاصغر والمماس هـ ط بالمماس س ح

## المسئلة الثانية

س ٦١ المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الناقص من نقطة خارجة عنه (الطريقة الاولى) يفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة ے هى النقطة المعلومة شكل (٤١) وان ے م هو المماس المطلوب وان م هى نقطة تماسه بالمنحنى فاذا وصل مستقيم ت م ومد على استقامته حتى يتلاقى فى نقطة مثل هـ مع العمود النازل من البورة ب على المماس كان بعد ت هـ مساويا الى ٢ ٢ وحينئذ تكون نقطة هـ موجودة على محيط دائرة الاستدلال التى مركزها هو نقطة ت وغير ذلك من حيث ان المماس عمودى على منتصف المستقيم ب هـ فيكون البعدان ے ب , ے هـ متساويين وحينئذ تكون نقطة هـ هى نقطة تقاطع دائرة الاستدلال مع الدائرة المرسومة بجعل نقطة ے مركزا وبعد ے ب نصف قطرها ومتى تعينت نقطة هـ بهذه الوسيلة فلا يبقى علينا سوى ان ننزل من نقطة ے عمودا على ب هـ أو نصل من نقطة ے




الى نقطة تقابل المستقيم ب ه بالدائرة الاصلية فيكون العمود المنزل أو المستقيم الموصول بهذه الكيفية هو المماس المطلوب واما من خصوص نقطة التماس فهى نقطة تقابل المماس مع المستقيم تَ ه

وحيث ان محيطي الدائرتين يتقاطعان على العموم فى نقطتين فتوجد حينئذ نقطة تقاطع اخرى مثل هَ ويلزم بنا على ذلك وجود مماس اخر مثل ى مَ

يشترط لامكان حل هذه المسئلة ان تكون النقطة المعلومة موضوعة خارج القطع الناقص لان دائرة الاستدلال والدائرة التى مركزها نقطة ى لايمكنهما ان يكونا خارجتين عن بعضهما حيث ان الثانية منهما مارة بنقطة ب الكائنة داخل الاولى وحيث انه لاجل تقاطع محيطى دائرتين يلزم ان يكون البعد بين مركزيهما اكبر من فاضل نصفى قطريهما اعنى يكون

ى تَ > تَ ه ـ ى ب أو

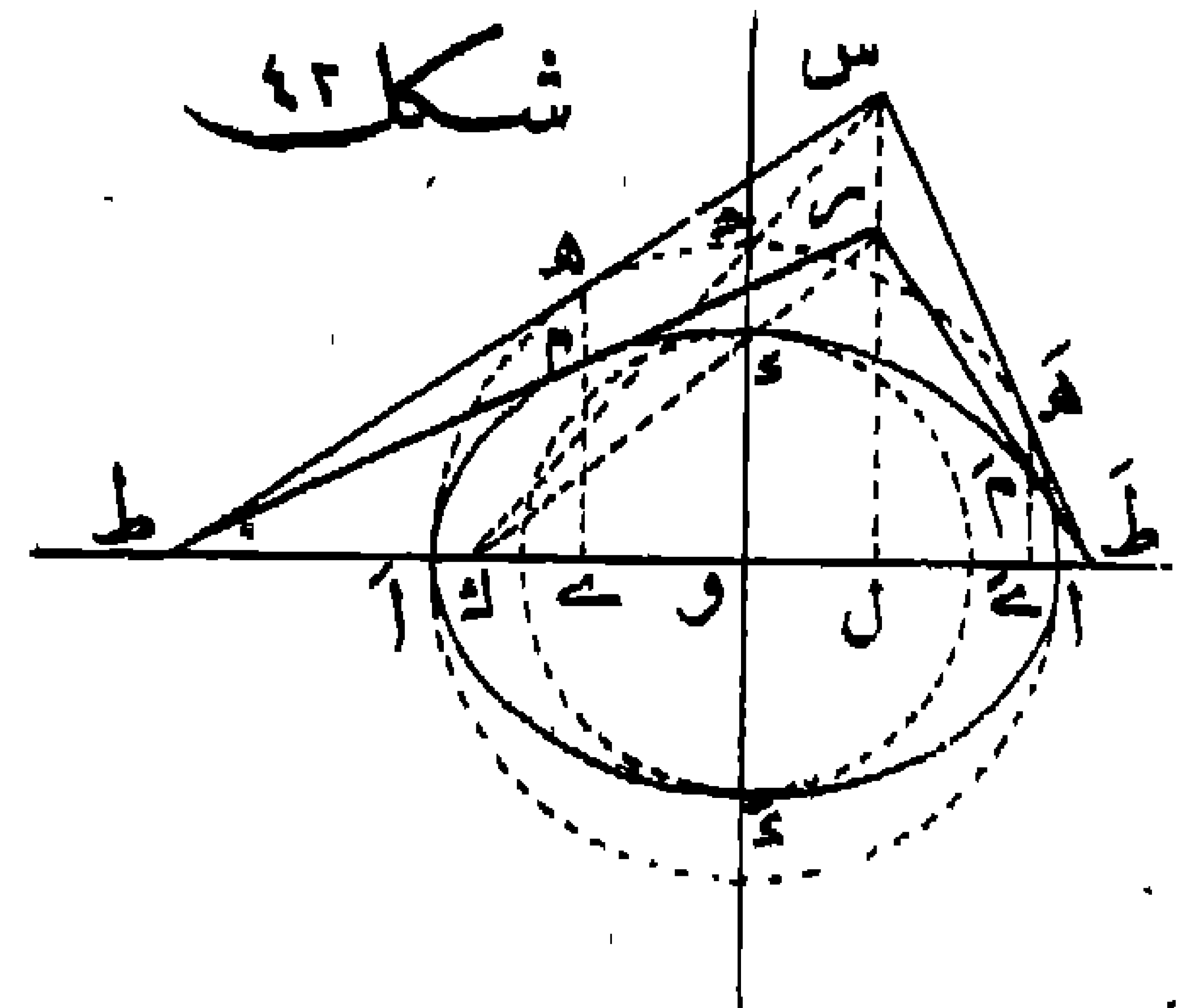
ى تَ + ى ب > تَ ه = ٢ ρ

وهذا هو الشرط المقرر فى بند (٣٩) الذى يدل على ان نقطة ى موضوعة خارج المنحنى

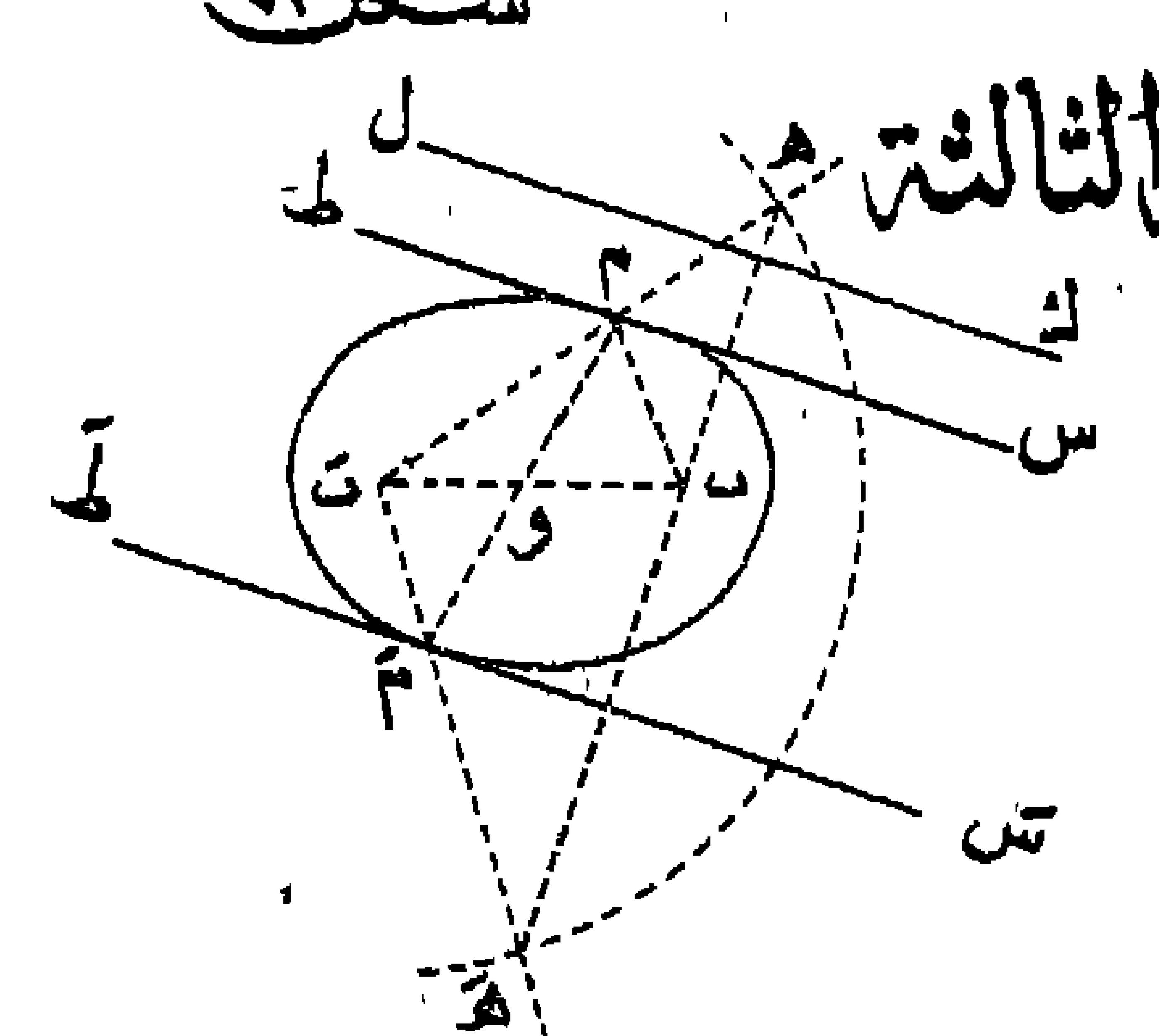
(الطريقة الثانية) لنفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة ر هى النقطة المعلومة وان رم هو المماس المطلوب الذى نقطة تماسه بالمنحنى هى نقطة م شكل (٤٢) فيرسم العمود م ى ويمد حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية فى نقطة مثل نقطة ه ثم يوصل المستقيم هط فيكون بمقتضى بند (٥٧) هو المماس لهذه الدائرة فيمد هذا المماس حتى يتلاقى مع احداثى نقطة ر فى نقطة مثل نقطة س ويحدث

س ل : ر ل :: ه ى : م ى :: ρ : ρَ

وبذلك يسهل رسم نقطة س لانه اذا وصل المستقيم ر ى ومد الى أن يقطع




يقطع المحور اَاَ في نقطة ك
ثم وصل مستقيم ك س حدث
ح و : و و :: س ل : ر ل :: ع : ع َ
لكن بما ان بعد ى و هو عين ع َ
فيكون بنا على ذلك ح و مساويا
الى ع أعني ان نقطة ح هي
من نقطة الدائرة الاصلية
وتؤل طريقة العمل الى ما سيأتي
وهو ان نصل من النقطة المعلومة الى رأس المحور الاصغر مستقيم ويمد هذا
المستقيم حتى يتلاقى مع المحور الاكبر ثم يوصل من نقطة تقابلهما وهي ك الى
نقطة ح التي هي نقطة تقابل الدائرة الاصلية بامتداد المحور الاصغر فتحصل
بنا على ذلك نقطة س وهي نقطة تقاطع المستقيم ك ح مع احداثي نقطة
ر واخيرا يرسم من نقطة س مستقيم مماس للدائرة الاصلية كالمستقيم س ه ط
فلا يبقى حينئذ سوى أن يوصل المستقيم ط ر فيكون هو المماس المطلوب
وتكون نقطة تقابله مع الاحداثي ه ى هي نقطة تماسه بالمنحني واما المماس
الثاني للدائرة الاصلية المرسوم من نقطة س أيضا فانه يعين المماس الثاني
للقطع الناقص
ويمكن استعواض هذه الاجراءت عند اللزوم باجراءات أخرى مشابهة
لها بالكلية انما يستعوض فيها المحور الاكبر بالمحور الاصغر فقط




## المسئلة الثالثة

٦٢ ــ المطلوب رسم مستقيم مماس
لقطع ناقص وموازٍ لاتجاه معلوم
(الطريقة الاولى) لنفرض ان ل ك
هو الاتجاه المعلوم كما في شكل (٤٣)
ولنفرض انه قد صار حل المسئلة وعلم
ان س ط هو المماس المطلوب

فاذا انزلنا من نقطة ب عمودا مثل ب هـ على المستقيم المماس لكان عمودا أيضا على ما يوازيه وهو ل ك وحينئذ يكون هذا العمود معين الوضع ولاشك في أن نقطة هـ توجد أيضا على دائرة الاستدلال التي مركزها نقطة بَ وحينئذ فيسهل تعيين هذه النقطة ثم بعد ذلك يتمم العمل كما في (الطريقة الأولى) من المسئلة السابقة

وحيث أن المستقيم يقابل محيط الدائرة في نقطتين فيوجد حينئذ مماس ثان للقطع الناقص مثل المماس طَ سَ موف للشرط المقترن في منطوق هذه المسئلة التي تكون دائما ممكنة الحل لكون المستقيم ب هـ مارا بنقطة ب الكائنة داخل دائرة الاستدلال

شكل ٤٤

(الطريقة الثانية) لنفرض أن المسئلة محلولة وان م ط هو المماس المطلوب فاذا مد الاحداثي م ى حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية في نقطة مثل هـ شكل (٤٤) لكان المستقيم هـ ط بمقتضى بند (٥٧) مماسا للدائرة المذكورة وتؤل المسئلة حينئذ الى البحث عن مستقيم مماس للدائرة الاصلية اذا كان اتجاه المستقيم هـ ط معلوما

ولاجل تعيين هذا الاتجاه نمد من نقطة ى مستقيما موازيا الى الاتجاه المعلوم كالمستقيم ى ل ثم نرسم من نقطة ل مستقيما موازيا الى هـ ط فيحدث من مثلثي و ى ل ، ى م ط أن

و ى : م ى :: و ل : ط ى

ومن جهة اخرى ينتج من تشابه مثلثي و ح ل ، ى هـ ط أن

و ح : هـ ى :: و ل : ط ى

وبناء عليه يكون

و ى : م ى :: و ح : هـ ى

فاذا غيرنا الوسطين ببعضهما يحدث

ور : وحـ :: مـ ى : هـ ى :: نَ : ن

لكن بما ان مستقيم ور = نَ فيكون وحـ = ن ويلزم حينئذ ان تكون نقطة حـ موجودة على الدائرة الاصلية

ومن ذلك تنتج الطريقة الآتية وهى ان يمد من نقطة ر مستقيم ر ل موازيا للاتجاه المعلوم ويوصل المستقيم لحـ ثم يرسم المستقيم هـ طَ مماسا للدائرة الاصلية وموازيا الى المستقيم لحـ ويرسم اخيرا من نقطة طَ مستقيم مواز للاتجاه المعلوم فيكون هذا الموازى هو المماس المطلوب للقطع الناقص ونقطة تماسه تكون موجودة على الاحداثى هـ ى

وحيث انه يمكن رسم مستقيمين مماسين للدائرة الاصلية وموازيين للمستقيم لحـ المعلوم فيكون حينئذ لهذه المسئلة حلان

ويشاهد بالسهولة ان نقطتى تماس كل مماسين متوازيين من مماسات القطع الناقص تكونان متماثلتى الوضع بالنسبة الى المركز

وفى الواقع كذلك لاننا اذا تصورنا دوران الشكل فى مستويه دورانا رحويا بقدر ١٨٠ حول نقطة و شكل (٤٣) لصار المماس الذى هو س ط بعد الحركة موازيا الى ل ك وبنا على ذلك يلزم ان يأخذ وضع المماس طَ سَ وفى اثناء نفس هذه الحركة ينتقل نصف القطر وم ويصير على استقامته الاولى وعلى ذلك يكون المستقيمان وم ، ومَ على استقامة واحدة

وقد تقدم فى بند (٣٧) أن كل مستقيم منتهى الطرفين بمنحنى القطع الناقص ومار بالمركز يكون منصفا بالمركز المذكور اعنى مقسوما به الى قسمين متساويين

٦٣ بند (تنبيه) من المهم ان يلاحظ ان الطرق التى ذكرناها لحد الآن لرسم مماسات القطع الناقص لا يحتاج فيها الا ان يكون منحنى القطع الناقص مرسوما من قبل ولا شك أن هذه مزية عظيمة لانه من الضرورى عند رسم اى قطع ناقص نقطة فنقطة أن يبحث عن المماسات له فى النقط التى تتعين اولا فاولا لان هذه المماسات تبين للرسيم هيئة المنحنى وترشده عند ما يريد جمع هذه النقط ببعضها بل وتجعله يكتفى بوجود القليل من نقط المنحنى لكن بشرط ان تكون معينة بالضبط الكلى ومن المشاهد أيضا ان الأفضل استعمال الطرق الاولى من المسائل المتقدمة فى حالة ما اذا كان جرى رسم المنحنى بطريقة رسمه الاولى المذكورة فى بند (٣٠)

وأما الطرق الثانية فانها تكون أفضل عندما يكون المنحنى مرسوما بالطريقة المذكورة فى بند (٤٥)

٦٤ بند (فى رسم العمودى على منحنى القطع الناقص) ما ذكرناه فى البنود (١٩) و(٢٠) و(٢١) بخصوص ذلك بالمقدمة فيه الكفاية ولا حاجة لاعادة الكلام على ذلك

## فى أقطار القطع الناقص

٦٥ بند قد ذكرنا فيما تقدم ببند (٤١) انه يمكن اعتبار القطع الناقص مسقطا لدائرة على مستو مائل على مستويها فهذا الاعتبار الذى استنتجنا منه جملة قضايا مهمة يسمح لنا ان نستخرج أيضا منه بعض قضايا اخرى لها تطبيقات نستعملها فيما بعد

(النظرية العاشرة) كل مستقيم مار بمركز القطع الناقص يكون قطرا له

لاننا اذا اعتبرنا القطع الناقص ام آم شكل (٤٥) والدائرة ام آمَ التى هو مسقط لها لوجدنا ان كل مستقيم مثل م م مار بمركز القطع الناقص مسقط لقطر مثل م مَ من اقطار الدائرة

وحيث ان هذا القطر منصف لجميع الاوتار العمودية عليه أعنى الموازية للقطر ر رَ فبناء على ذلك يكون المستقيم م مَ منصفا لمساقط هذه الاوتار أعنى لاوتار القطع الناقص الموازية الى المستقيم ر رَ الذى هو مسقط قطر ر رَ من الدائرة وعلى ذلك يكون كل مستقيم حيثما اتفق مثل م مَ مار بمركز القطع الناقص منصفا لجميع الاوتار الموازية لاتجاه معلوم وبمقتضى بند (٦) يكون قطرا من اقطار المنحنى المذكور

لكن يلزم ملاحظة صحة عكس هذه النظرية بمعنى انه حيث كان قطر ر رَ من الدائرة منصفا لجميع الاوتار الموازية الى قطر م مَ لزم ان يكون مسقطه وهو ر رَ منصفا بالمثل للاوتار الموازية الى م مَ

وعلى هذا يعلم ان اقطار القطع الناقص مرتبطة ببعضها مثنى بحيث ان كل قطر منها

منهما ينصف جميع الاوتار الموازية الى القطر الثانى وهذا هو ما يعبر عنه بالقول ان اتجاه احد هذين القطرين مزاوج لاتجاه الآخر كما فى بند (٦١)
ومن ذلك تنتج النظرية الآتية
(النظرية الحادية عشر) أقطار القطع الناقص مزدوجة مع بعضها مثنى
٦٦ بند من المعلوم ان القطرين المزدوجين فى الدائرة اللذين تنسقط الزاوية الواقعة بينهما على حقيقتها هما القطران ا ا َ ر ب ب َ لا غير وحينئذ يعلم من ذلك ان محورى القطع الناقص هما فقط قطراه المزدوجان اللذان تكون الزاوية الواقعة بينهما قائمة

# المسئلة الاولى

٦٧ بند المطلوب ايجاد القطر المزاوج لقطر معلوم
مثلا لنفرض ان م مَ شكل (٤٦) هو القطر المعلوم فيكفى لتعيين القطر المزاوج له ان يرسم الوتر حـ حَ الموازى الى م مَ وينصف بنقطة مثل نقطة ى ثم نصل من هذه النقطة الى المركز فيكون المستقيم الموصول بهذه الكيفية هو القطر المطلوب
فاذا لم يكن القطع الناقص مرسوما يرسم المستقيم حـ حَ موازيا الى م مَ ثم تعين نقطتا حـ ر حَ بالطريقة الموضحة فى بند (٣١)
٦٨ بند خاصية الاقطار المزدوجة المتقدمة توصلنا الى حل المسئلة الآتية أيضا التى تطرأ كثيرا فى العمل

# المسئلة الثانية

المطلوب ايجاد مركز قطع ناقص مرسوم كله أو جزء منه فقط
لذلك يرسم الوتران حـ حَ ر ء ءَ المتوازيان فى اتجاه حيثما اتفق ونصل بين منتصفيهما وهما ى ر ك شكل (٤٦) بمستقيم فيكون هو القطر المزاوج لهذه الاوتار ويمر حينئذ بمركز القطع الناقص

شكل ٤٦

فاذا أجرينا هذه العملية مرة ثانية على وترين متوازيين لكنهما غير موازيين للوترين الاولين تحصل قطر جديد يتقاطع مع القطر الاول فى نقطة فتكون هى المركز المطلوب

ند ٦٩ لا يخفى انه تقدم فى بند (١١) ان المماس لأى منحن يلزم ان يكون موازيا الى الاوتار المزدوجة الاتجاه مع القطر المار بنقطة التماس فاذا نظرنا الى ذلك رأينا أنه يمكن حل كل من المسئلة الاولى والثالثة من المسائل الثلاثة المتعلقة برسم مماسات منحن معلوم باستعمال خواص الاقطار المزدوجة لكن فضلا عن كون الاعمال الرسمية التى تستلزمها هذه الطريقة الجديدة ليست أسهل مما تستلزمه الطرق التى تقدمت فانه لا يمكن استعمالها مع السهولة الا اذا كان القطع الناقص مرسوما من قبل

ومع ذلك فانه يلزم الاعتراف بأن هذه الطريقة يكون لها أهمية فى حالة ما يراد رسم مماس لقطع ناقص مرسوم لكن بورتيه مجهولتان

ند ٧٠ (النظرية الثانية عشر). نصف أى قطر من أقطار القطع الناقص وسط متناسب بين جزءى مماسه الموازى لهذا القطر المحصورين بين نقطة التماس وبين المحورين

فاذا فرض مثلا ان خطى ر رَ و م مَ شكل (٤٧) قطران متعامدان فى الدائرة كان مسقطاهما وهما م١ م١َ و ر١ ر١َ قطرين مزدوجين معا فى القطع الناقص كما فى بند (٤٩) فاذا اخذ مستقيم مثل م ط مماس للدائرة المذكورة وكان قاطعا لقطرى اأَ و ب بَ فى نقطتى ط و حـ فيحدث من مثلث حـ و ط القائم الزاوية أن

$$\text{و م}^2 = \text{م حـ} \times \text{م ط} \qquad (1)$$

أو يكون

$$\text{و ر}^2 = \text{م حـ} \times \text{م ط}$$

لكن حيث ان اضلاع مثلثى ر ر١ و و م م١ ط متوازية فهما متشابهان وينتج منهما أن

$$\frac{\text{و ر١}}{\text{و ر}} = \frac{\text{م١ ط}}{\text{م ط}} = \frac{\text{م١ حـ١}}{\text{م حـ}} = \text{ك}$$

وحرف ك فى هذا القانون رمز المقدار المشترك لهذه النسب الثلاثة فينتج

من هذا القانون أن

و ر = ك × و ر١   و م ط = ك × م١ ط   و م ح = ك × م١ ح

وبوضع هذه المقادير فى معادلة (١) وقسمة الطرفين على ك٢ يحدث

و ر١ ٢ = م١ ح × م١ ط   وهذا هو ما اردنا بيانه

بند ٧١ يمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة الآتية

## المسئلة الثالثة

المطلوب رسم القطع الناقص اذا كان معلوما منه قطران حيثما اتفق مزدوجان معا لذلك يقال من المعلوم ان هذه المسئلة تصير محلولة اذا امكن ايجاد المحورين فلذا يلزم الابتداء اولا بالبحث عن اتجاهيهما مع الاستعانة بالنظرية السابقة فنفرض أن هذه المسئلة الفرعية محلولة وان وم ور شكل (٤٨) هما القطران المزدوجان المعلومان وان وط و وح اتجاها المحورين فمن حيث أن مستقيم ح م ط الموازى الى و ر هو مماس للقطع الناقص المجهول فى نقطة م فبمقتضى ما تقدم فى بند (٧٠) يكون

شكل ٤٨

و ر ٢ = م ح × م ط

ثم نرسم محيط دائرة على القطر ح ط فيمر هذا المحيط بنقطة و لان زاوية ح و ط قائمة واذا اقمنا م ك عموديا على ح ط حدث أيضا

م ك ٢ = م ح × م ط

وبناء على ذلك يكون

م ك = و ر

وحينئذ يكون المستقيم م ك معلوما وعليه يكون حل المسئلة هو كالآتى بان يرسم من نقطة م التى هى نهاية أحد القطرين المعلومين مستقيم مثل ح م ط موازٍ للقطر الآخر ثم يقام من النقطة بعينها عمود مثل م ك = و ر ثم ترسم دائرة تمر بنقطتى و و ك مركزها على المستقيم ح ط فيقطع محيطها المستقيم ح ط فى نقطتين موجودتين بالضرورة على امتدادى المحورين المطلوبين فلم يبق حينئذ لتعيين اتجاهيهما سوى ان يوصل من هاتين النقطتين المعينتين الى نقطة و وبعد ذلك يلزم

البحث عن حقيقة طول كل من هذين المحورين وللتوصل الى ذلك نتذكر ان نصف المحور الاكبر وسط متناسب بين وے ر وط بمقتضى بند (٥٩) فليرسم حينئذ نصف دائرة على وط وتمد العمود مے لحد نقطة و التى تتقابل فيها مع نصف الدائرة فيكون وهـ هو الطول المطلوب الذى يلزم وضعه على المستقيم وط بجانبى نقطة و

وقد تمكن اعادة العملية بعينها على مستقيم وحـ للحصول على طول المحور الاصغر لكنه يمكن اختصار ذلك بملاحظة انه لداعى كون المستقيم وهـ مساويا الى نصف المحور الاكبر تكون نقطة هـ نقطة من الدائرة الاصلية بحيث يحدث

مے : هے :: ه̄ : ه

وحيث ان وهـ = ه فحينئذ يكون ول = ه̄

وبنا على ذلك يكفى وضع البعد ول على اتجاه المستقيم وحـ بجانبى نقطة و

٧٢ بند يشاهد مما ذكر انه تمكن ايجاد محورى القطع الناقص اذا علم منه قطران مزدوجان معا وان ليس لتلك المسئلة سوى حل واحد فتنتج حينئذ النظرية الآتية (النظرية الثالثة عشر) القطع الناقص يصير معلوما متى علم منه قطران مزدوجان معا

# الفصل الثالث

## فى مساحة القطع الناقص وفى المجسم الناقصى وحجمه

٧٣ بند القطع الناقص هو احد المنحنيات التى يمكن حساب مساحاتها بالضبط وهذه هى المسئلة التى نريد ان نتصدى الآن لذكرها ولذلك نبحث أولا عن مساحة الجزء المحصور بين قوس من المنحنى واحد محوريه وبين احداثيين عموديين على هذا المحور فنقول

شكل ٤٩

اذا كان القصد مثلا حساب المساحة م هـ ك ے شكل (٤٩) المحصورة بين احداثيين عموديين على المحور الاكبر فتقسم المسافة ے ك الى اجزاء متساوية عددها اختيارى وتقام من نقط التقاسيم اعمدة وتمد الى ان تقابل الدائرة المرسومة على المحور

الأكبر ثم من النقط ب ، ج ، .... الخ وكذا من النقط بَ ، جَ ، .... الخ
ترسم مستقيمات موازية الى المحور المذكور فتتكون جملتان من المستطيلات
قواعدها متساوية وارتفاعات مستطيلات احداهما هى رأسيات القطع الناقص
واما ارتفاعات مستطيلات الجملة الثانية فهى رأسيات الدائرة وبمقتضى بند (٤٤)
يكون حينئذ

ے ا ب ء / ے اَ بَ ء = ء بَ ج / ء بَ جَ = ....... = قَ / ق

فاذا رمز بحرف س لمجموع مساحات المستطيلات المرسومة داخل القطع الناقص
وبحرف سَ لمجموع المستطيلات المرسومة داخل الدائرة حدث

س : سَ :: قَ : ق

وحيث ان هذا التناسب يبقى صحيحًا مهما كان عدد تقاسيم ے ك فاذا فرض
حينئذ أن عدد التقاسيم يزداد الى ما لا نهاية قرب بالضرورة المجموع س شيئًا
فشيئًا من مساحة القطعة الناقصية التى يرمز لها بحرف ص الجارى البحث
عنها وأما المجموع سَ فانه يميل لأن يؤول الى مساحة القطعة الدائرية المناظرة لها
التى يرمز اليها بحرف صَ وحينئذ اذا اخذت النهايات أعنى حينما تصير نقط التقاسيم
متقاربة جدا من بعضها يحدث

ص : صَ :: قَ : ق

ومن البديهى أنه اذا اخذت الاحداثيات عمودية على المحور الاصغر ورمز بحرف صٖ
لمساحة القطعة الناقصية وبحرف صٖ َ للقطعة الدائرية المناظرة لها التى هى جزء
من الدائرة المرسومة على المحور الاصغر حدث تناسبٌ مشابه الى التناسب الاول
أعنى يكون

صٖ : صٖ َ :: ق : قَ

وهذا دليل على صحة النظرية الآتية فهو اثبات لها
(النظرية الرابعة عشر) نسبة مساحة القطعة المحصورة بين قوس من القطع
الناقص واحد محوريه وبين احداثيين عموديين على المحور المذكور الى مساحة القطعة
الدائرية المناظرة لها المرسومة على المحور بعينه كنسبة قطر القطع الناقص العمودى
على المحور المشترك الى قطر الدائرة المناظر له أى العمودى ايضا على المحور المشترك
المذكور

ش٧٤ـ لنفرض الآن ان نقطتي ے , ك بعدتا عن بعضهما الى ان انطبقت احداهما على نقطة ه, والاخرى على نقطة ه̄, فتؤل حينئذ القطعة الناقصية الى نصف القطع الناقص ويصير جزء الدائرة نصف دائرة فعلى هذا اذا رمز بحرف س لمساحة القطع الناقص كله كانت نسبه

$$\tfrac{1}{2}\,\text{س} : \tfrac{1}{2}\,\text{ط}\,\text{ه}^{2} :: \bar{\text{ه}} : \text{ه}$$

ومن هذا التناسب يكون

$$\text{س} = \text{ط}\ \text{ه}\ \bar{\text{ه}}$$

وحينئذ فتنتج النتيجة الآتية

(نتيجة) مساحة القطع الناقص تساوى حاصل ضرب نصفى محوريه فى النسبة التقريبيه

# فى تكوين المجسم الناقصى وتعيين حجمه

ش٧٥ـ اذا تصورنا أن نصف قطع ناقص قد دار حول أحد محوريه دورة كاملة تولد بالضرورة عن هذا الدوران جسم تحركى يسمى بالمجسم الناقصى التحركى ويكون القطع الجانبى لهذا المجسم أعنى المقطع الحادث فيه بمستو مار بمحور الدوران هو بالضرورة نفس القطع الناقص الذى ولده

فاذا حصل الدوران حول محوره الاكبر سمى الجسم الحادث بالمجسم الناقصى المستطيل اما اذا كان محور الدوران هو المحور الاصغر سمى الجسم الحادث بالمجسم الناقصى المبطط ولنتصدى بالبحث عن حجم كلا هذين النوعين فنقول

ش٧٦ـ (فى المجسم الناقصى المستطيل) ليكن م هـ ك ے شكل (٤٩) هو جزء من القطع الناقص فبدورانه حول المحور الاكبر يحدث قطعة من المجسم الناقصى محصورة بين مستويين عموديين على هذا المحور

فاذا اجرينا العمليات المشروحة ببند (٧٣) نشأ عن ذلك جملتان من المستطيلات التى يحدث من دورانها جملتان من الاسطوانات ولكون ان ارتفاع هذه الاسطوانات واحد فتكون النسبة بينها كالنسبة بين قواعدها أو كالنسبة بين مربعات الرأسيات المناظرة لها ويحدث حينئذ أن

$$\frac{\text{حجم ے اب د}}{\text{حجم ے اَ بَ دَ}} = \frac{\text{حجم د ت ح ح}}{\text{حجم د تَ حَ حَ}} = \ldots\ldots = \frac{\text{ح}^{2}}{\bar{\text{ح}}^{2}}$$

فاذا رمز بحرف ع لمجموع الاسطوانات المرسومة داخل قطعة الجسم الناقصى وبحرف عَ لمجموع الاسطوانات المرسومة داخل قطعة الكرة الحادثة من دوران قوس الدائرة حدث

$$ع : \bar{ع} :: ق^{٢} : \bar{ق}^{٢}$$

ولاشك ان هذا التناسب يكون موجودا مهما أخذ الارتفاع المشترك للاسطوانات صغيرا جدا بل وفى حالة اخذ النهايات ايضا ولايخفى انه اذا صغر هذا الارتفاع الى مالانهاية آل الجرم ع الى ع الذى هو حجم القطعة الناقصية والجرم عَ الى عَ الذى هو حجم القطعة الكروية المناظرة لها ويكون حينئذ

$$ع : \bar{ع} :: ق^{٢} : \bar{ق}^{٢}$$

س٧٧د (فى المجسم الناقصى المبطط) اذا تصورنا نفس هذه التصورات والاجرآات بعينها مع استبدال المحور الاكبر بالمحور الاصغر والدائرة المرسومة فى شكل (٤٩) بالدائرة المرسومة على المحور الاصغر وكذلك مع تغيير الاحداثيين م ح ، ه ك بالاحداثيين العموديين على المحور الاصغر توصلنا بمثل ما تقدم الى التناسب الآتى

$$ع : \bar{ع} :: ق^{٢} : \bar{ق}^{٢}$$

س٧٨د فاذا جمعت هذه النتائج فى منطوق واحد امكن تشكيل النظرية الآتية (النظرية الخامسة عشر) اذا دور قطع ناقص مع الدائرة المرسومة على أحد محوريه دورة كاملة حول المحور المشترك بينهما كانت نسبة حجم القطعة الناقصية المحصورة بين مستويين عموديين على محور الدوران الى حجم القطعة الكروية المحصورة بين نفس المستويين المذكورين كالنسبة بين مربعى القطرين العموديين على محور الدوران المذكور

س٧٩د فاذا فرض ان المستويين المحددين لهاتين القطعتين قد بعدا عن بعضهما حتى مرا بنهايتى محور الدوران آل الحجمان الحادثان الى حجمى مجسم القطع الناقص الكلى والكرة بتمامها وحينئذ اذا كان المجسم المعلوم هو مجسم القطع الناقص المستطيل حدث

$$\frac{\bar{ق}^{٢}}{ق^{٢}} = \frac{ع}{\frac{٤}{٣} ط ق^{٣}}$$

ومنه يكون

$$ع = \frac{٤}{٣} ط ق \bar{ق}^{٢} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

اما اذا كان المجسم المعلوم هو المجسم الناقصى المبطط حدث

$$\frac{\text{ع}_{1}}{\frac{4}{3}\,\text{ط}\,\text{ح}^{3}} = \frac{\text{ح}'^{2}}{\text{ح}^{2}}$$

ومنه يكون

$$\text{ع}_{1} = \frac{4}{3}\,\text{ط}\,\text{ح}'^{2}\,\bar{\text{ح}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ويمكن كتابة كل من مقدارى (١) , (٢) بالصورة الآتية

$$\text{ع} = \text{ط}\,\text{ح}\,\bar{\text{ح}} \times \frac{4}{3}\,\bar{\text{ح}} \quad \text{و}$$

$$\text{ع}_{1} = \text{ط}\,\text{ح}\,\bar{\text{ح}}' \times \frac{4}{3}\,\text{ح}$$

وهنا يوصلنا الى منطوق سهل التذكار وهو الآتى

حجم مجسم القطع الناقص يحصل بضرب مساحة القطع الناقص الراسم له فى $\frac{4}{3}$ نصف المحور العمودى على محور الدوران

(٨٤ـ فى تقدير حجم الجسم القرعى) الجزء الاسفل من قران الانبيق يعمل غالبا على شكل قطعة من مجسم ناقصى مستطيل ويعرف بقرعة الانبيق فلاجل تقدير حجم هذا الجزء القرعى توضع القرعة بحيث تكون حافتها المستديرة أفقية وبعد ذلك يوضع على تلك الحافة مسطرة مدرجة بحيث يكون حرفها مارا من مركز فتحة القرعة ويحرك على حرف هذه المسطرة خيط شاقول بحيث يكون طرف الثقل المعلق به مماسا على الدوام للسطح الداخلى من القرعة

فلنفرض مثلا ان الخيط موضوع فى الوضع م ى شكل (٥٠) ويقاس البعد ى ى بواسطة المسطرة ثم البعد م ى بخيط الشاقول المدرج وباعادة هذه العملية جملة مرات فى اوضاع مختلفة يمكن الحصول على جملة نقط من القطع الجانبى ا ح ب للقرعة فتوضع على الورق ويمر بها منحن فيكون هو جزء من القطع الناقص الراسم للقرعة ونعلم ايضا راسه وهى ح واتجاه محوره الاكبر وحيث ان جزأ من القطع الناقص معلوم فيسهل ايجاد مركزه وهو نقطة و بمقتضى ما تقدم

شكل ٥٠

فاذا

فى ش٦٨ د وبذا يمكن رسم الدائرة الاصلية وحساب حجم الجسم الحادث من دوران قطعة الدائرة إ حـ ب ثم نقول اذا رمزنا بحرف ح لحجم القرعة وبحرف ح١ لحجم قطعة الكرة فيكون بمقتضى ( ش٦٨ د )

$$\frac{\text{ح}}{\text{ح}_1} = \frac{\text{ق}^2}{\text{ق}_1^2}$$

ثم نحسب النسبة $\frac{\text{ق}}{\text{ق}_1}$ من الارتباط الآتى

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}_1} = \frac{\text{ء}\,\text{ا}}{\text{ء}_1\,\text{ا}}$$

وحينئذ اذا لاحظنا ان حجم القطعة الكروية مساو الى

$$\text{ح}_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{ط}\;\overline{\text{ء}\,\text{ا}_1}^2 \times \text{ء}\,\text{حـ} + \tfrac{1}{6}\,\text{ط}\;\overline{\text{ء}\,\text{حـ}}^3$$

فيكون الحجم المطلوب مساويا الى

$$\text{ح} = \frac{\overline{\text{ء}\,\text{ا}}^2}{\overline{\text{ء}_1\,\text{ا}}^2}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{ط}\;\overline{\text{ء}\,\text{ا}_1}^2 \times \text{ء}\,\text{حـ} + \tfrac{1}{6}\,\text{ط}\;\overline{\text{ء}\,\text{حـ}}^3\right)$$

وبالاختصار يحدث

$$\text{ح} = \tfrac{1}{2}\,\text{ط}\;\overline{\text{ء}\,\text{ا}}^2 \times \text{ء}\,\text{حـ} + \tfrac{1}{6}\,\text{ط}\,\frac{\overline{\text{ء}\,\text{ا}}^2}{\overline{\text{ء}_1\,\text{ا}}^2} \times \overline{\text{ء}\,\text{حـ}}^3$$

وهو المطلوب

# الباب الثالث

## فى القطع الزائد وفيه فصول

## الفصل الاول

### فى تعريف القطع الزائد وطرق رسمه وخواصه الهندسيه

ش١٨ د القطع الزائد هو منحنٍ مستوى الفرق بين البعدين الواصلين من اى نقطة منه الى نقطتين ثابتتين فى مستويه يكون ثابتا على الدوام

وهاتان النقطتان الثابتتان تسميان بورتى القطع الزائد والمستقيمات الواصلة

من هاتين البورتين الى اى نقطة من المنحنى تسمى انصاف اقطار بورية
ومن المعلوم ان هذا المنحنى يمتد الى ما لا نهاية لانه اذا اضيف على نصفى قطرى البورتين
كمية واحدة وفرضنا ان هذه الكمية تزداد شيئا فشيئا فان نصفى القطرين المذكورين
تزدادان بقدر ما يراد لكن بدون ان يتغير الفرق بينهما

س ٨٢ د في طرق رسم القطع الزائد — اولا طريقة رسمه بالاستمرار

ينتج من التعريف المتقدم للقطع الزائد طريقة لرسمه بالاستمرار اعنى لرسم جزء
منه محدود وهي ان تؤخذ مسطرة طولها حيثما اتفق وتثبت من احد طرفيها
في احدى البورتين وهي ت شكل (٥١) تثبيتا بحيث لا يمنع دوران
المسطرة حول هذه النقطة بالسهولة ثم يؤخذ خيط ويثبت احد طرفيه
في الطرف الثاني من المسطرة وطرفه الثاني في البورة الاخرى ب انما يلزم ان
يكون طول هذا الخيط اقل من طول المسطرة بمقدار مساو للفرق الثابت بين نصفى
القطرين البوريين الذى يرمز له بالرمز ٢ ﻫ فبهذه الكيفية اذا حركت
المسطرة الى ان تشد الخيط المثبت فيها
باحد طرفيه شدا قويا صارت نقطة ح
بالضرورة نقطة من القطع الزائد
ثم يحرك سن القلم الرصاص بحيث
يكون دائما متكئا على حافة المسطرة
وشادا للخيط فيكون المنحنى المرسوم
بسن القلم قوسا من القطع الزائد

شكل ٥١

وفي الواقع لانه اذا فرضنا ان نقطة م وضع من اوضاع سن القلم الرصاص
شوهد ان بعدى تح ، بح قد نقصا في آن واحد بقدر م حَ وان
المسطرة انتقلت من الوضع تح الى الوضع تحَ فحينئذ يكون باقي الطرح
تم - بم مساويا ايضا الى ٢ ﻫ

ومن البديهي انه اذا نقلت المسطرة وثبت طرفها في نقطة ب بدلا عن ت
وثبت ايضا الخيط في نقطة ت تحصل فرع آخر من القطع الزائد
وهذه الطريقة هي اقل ضبطا من طريقة رسم القطع الناقص بالاستمرار فضلا عن

كونها تحتاج لمسطرة مخصوصة لا يمكن عملها بالضبط الا بمشقة زائدة

ش ٨٣ ثانيا طريقة رسم نقطة فنقطة — احسن طريقة مضبوطة لرسم القطع الزائد هي ان تعين عدة نقط منه وتجمع بمنحن متصل

مثلا ليكن ب ، ت شكل (٥٢) بورتي القطع الزائد فناخذ بعد ت ك = ٢ م ثم نجعل نقطة ت مركزا وبنصف قطر حيثما اتفق نرسم محيط دائرة يقطع المستقيم ب ت في نقطة مثل ء ثم نجعل نقطة ب مركزا وبنصف قطر مساو الى ء ك نرسم محيطا آخر فيقطع المحيط الاول في نقطتين مثل م ، مَ تكونان نقطتين من القطع الزائد

شكل ٥٣

فاذا غيرنا وضع نقطة ء عدة مرات نتحصل على جملة نقط من القطع الزائد بقدر ما نريد

ش ٨٤ في كل وضع من اوضاع نقطة ء يمكن الحصول على اربع نقط من القطع الزائد ويكفي في ذلك ان يبدل العمل على كل من البورتين ب ، ت

ومن الواضح انه يلزم لامكان تقاطع الدائرتين ان يكون بعد نقطة ء عن نقطة ب اكبر من بعد نقطة ا التي هي وسط بعد ك ب عن نقطة ب بعينها

ومما يشاهد بالسهولة هو ان القطع الزائد يتركب من فرعين لانهائيين ليس بينهما نقط مشتركة ابدا لان كل نقطة من نقطه الكائنة في جهة البورة ب كنقطة م مثلا يوجد فيها ان ت م > ب م اما النقط الكائنة في جهة البورة ت يوجد في كل منها بالعكس ان ت هـ < ب هـ

## الخواص الهندسية للقطع الزائد

ش ٨٥ النظرية الاولى — القطع الزائد هو منحن محدب

وبرهان هذه النظرية مشابه لبرهان النظرية المماثلة لها في القطع الناقص فلاثباتها يكفي حينئذ ان نتصدى لشرح المسائل الآتية

المطلوب ايجاد نقط تقابل مستقيم بقطع زائد او بعبارة اخرى يقال ان المعلوم مستقيم ونقطتان والمطلوب ايجاد نقطة على هذا المستقيم يكون الفرق بين بعديها عن النقطتين المعلومتين مساويا لطول معلوم

ولذلك نفرض ان المسألة محلولة وان نقطتي ب ، ت شكل (٥٣) هما البورتان وان مستقيم م مَ هو المستقيم المعلوم ونفرض ايضا ان نقطة م هي النقطة المطلوبة ثم نصل المستقيم م ثم ونأخذ عليه البعد م هـ مساويا الى بعد م ت ونبحث عن النقطة ب المماثلة لنقطة ت بالنسبة الى المستقيم المعلوم ثم نصل مستقيمي م ت ، م ب

شكل ٥٣

فمن الواضح ان تكون الثلاث مستقيمات م هـ ، م ت ، م ب متساوية وبناء عليه تكون نقطة م مركز الدائرة تمر بالثلاث نقط هـ ، ت ، ب فاما نقطتا ت ، ب الاخيرتان فهما معلومتان واما النقطة هـ الاولى فيلزم لايجادها ان يلاحظ انه اذا رسم محيط دائرة بجعل نقطة ب مركزا وبنصف قطر مساو الى الفرق المعلوم وهو ٢ م كان هذا المحيط مارا بنقطة هـ ومماسا للدائرة المتقدمة في نفس هذه النقطة وحينئذ تؤل المسألة الى المنطوق الآتي وهو ان المطلوب رسم محيط دائرة مار بنقطتي ت ، ب ومماس لمحيط دائرة معلوم وحيث بينا حل هذه المسألة في بند (٢١) فلا حاجة حينئذ الى الرجوع اليها هنا ولكونه اتضح فيما سبق ان هذه المسألة ليس لها الا حلين اثنين على الاكثر فبناء على ذلك يثبت ان المستقيم لا يمكنه ان يقابل منحنى القطع الزائد الا في نقطتين وهذا هو ما اردنا بيانه

# في المحاور والرؤوس

٨٦ بند النظرية الثانية — المستقيم الواصل بين بورتي القطع الزائد

والمستقيم

والمستقيم العمودى عليه من وسطهما المحوران لهذا المنحنى وبرهان ذلك هو عين البرهان المقرر في القطع الناقص ببند (٤٢)

وانما يستعمل هنا شكل (٥٤) لاجل تطبيق البراهين المذكورة عليه

ومما يشاهد بالسهولة هو ان المحور حـ حـَ لا يقابل القطع الزائد ابدا لانه لما كانت نقط هذا المستقيم متساوية البعد عن البورتين فلا يتاتى ان تكون من نقط المنحنى

وينتج من ذلك ان منحنى القطع الزائد ليس له سوى رأسين اثنين يمكن تعيينهما بالسهولة

شكل ٥٤

وفى الواقع لان نقطة ا التى هى وسط بعد ب ك شكل (٥٤) هى نقطة من المنحنى اذ ان

ت ا - ب ا = ت ا - ا ك = ت ك = ٢ م

فتكون حينئذ نقطة ا المذكورة احدى رأسى المنحنى

ولاجل ايجاد الرأس الثانية يؤخذ بعد ب كَ مساويا الى بعد تَ كَ ثم ينصف بعد تَ كَ بنقطة مثل اَ فتكون هى الرأس الثانية المطلوبة او يؤخذ بعد تَ اَ مساويا لبعد ب ا

ولاجل تمييز هذين المحورين عن بعضهما سمى احدهما بالمحور القاطع والثانى بالمحور الغير قاطع

ومن البديهى ان ا اَ يكون مساويا للفرق الثابت بين نصفى القطرين البوريين لنقطة حيثما اتفق من المنحنى وذلك لان

ا اَ = تَ ك + ا ك - اَ تَ

لكن كان ا ك = اَ تَ = ب ك / ٢

فحينئذ يكون ا اَ = تَ ك = ٢ م

سند ٨٧ (فى مركز القطع الزائد) النظرية الثالثة - نقطة تقابل محورى

القطع الزائد بعضها هي مركز هذا المنحني

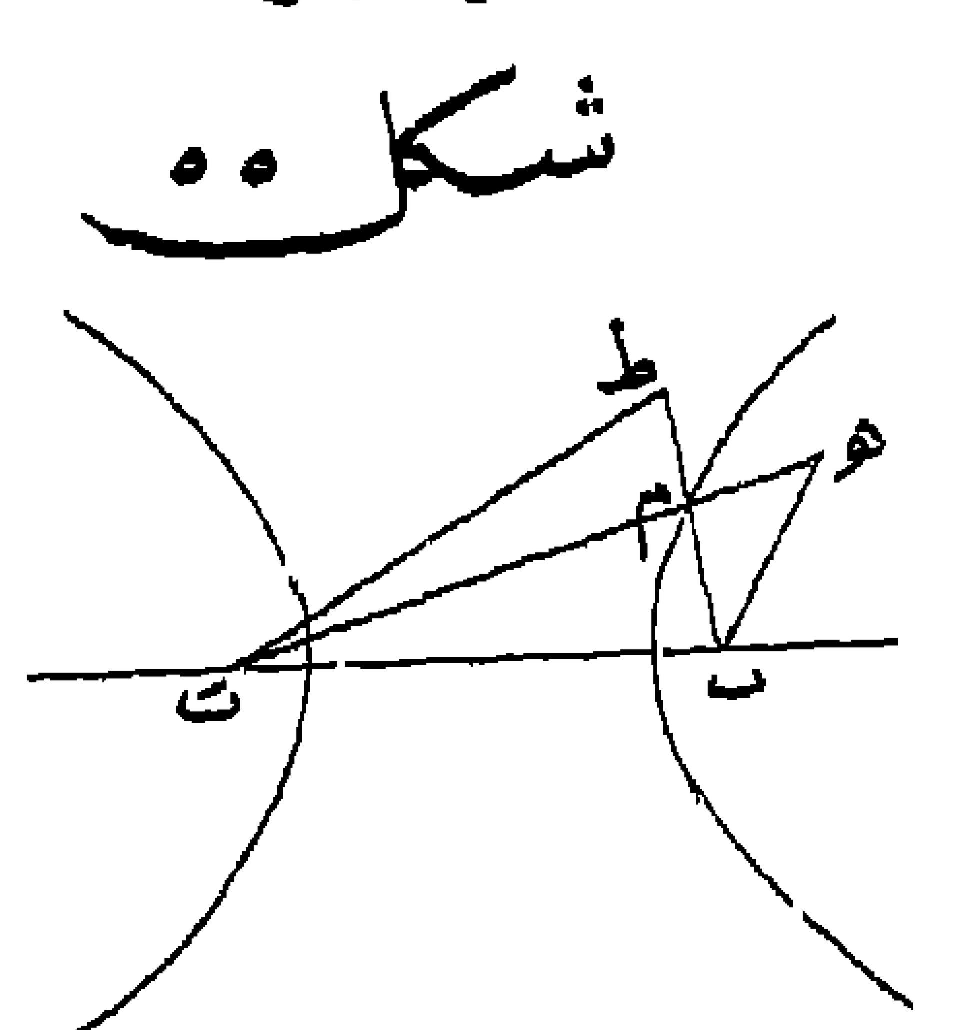
وبرهان ذلك هو عين البرهان المتقدم في القطع الناقص ببند (٤٧) مطبقا على شكل (٥٤) المتقدم

٨٨ بند الاختلاف المركزي — من المعلوم ان هيئة القطع الزائد تتعلق بالنسبة الكائنة بين بعد البورتين عن بعضهما وبين طول المحور القاطع وتسمى هذه النسبة بالاختلاف المركزي فاذا رمز بحرف ٢ ح للبعد بين البورتين وبحرف ٢ ج لطول المحور القاطع كان الاختلاف المركزي

$$ف = \frac{ح}{ج}$$

ومن هنا ينشأ هذا ان الاختلاف المركزي يكون دائما اكبر من الواحد الصحيح وانه من البديهي ان القطع الزائد يكون معينا متى علم كل من اختلافه المركزي وطول محوره القاطع اعني المسافة الكائنة بين رأسيه

٨٩ بند النظرية الرابعة — منحني القطع الزائد يقسم مستويه الى قسمين بحيث يكون الفرق بين نصفي القطرين البورين لاي نقطة من القسم الاول اصغر من طول المحور القاطع اما في القسم الثاني يكون هذا الفرق اكبر من طول المحور المذكور




فاولا لتكن نقطة ط مثلا نقطة من القسم الاول وهو الخارجي بالنسبة للقطع الزائد كما في شكل (٥٥) بمعنى انها موضوعة في المسافة المنحصرة بين الفرعين فاذا وصل منها الى البورتين بنصفي قطرين بورين كان من الواضح الجلي ان نصفي القطرين المذكورين قاطعان لمنحني القطع الزائد ولتكن نقطة م مثلا احدى نقطتي التقاطع فنصل مستقيم ت م ويحدث حينئذ من مثلث ط م ت ان

$$ط ت - ط م < م ت$$

وبطرح م ب من هذه المتباينة يحدث

$$ط ت - ط م - م ب < م ت - م ب$$

او

أو يكون ط ت - ط ب < ٢ ق

وثانيا اذا اخذت نقطة داخل المنحنى كنقطة هـ مثلا ووصل نصفا قطريها البوريان اللذان يتلاقى احدهما مع المنحنى ثم فرض ان نقطة م هى نقطة تلاقى احدهما به ووصل منها الى البورة ب بمستقيم مثل ب م حدث من مثلث هـ م ب الارتباط الآتى

م هـ + م ب > هـ ب

فاذا اضفنا لكل من الطرفين م ت حدث

م ت + م هـ + م ب > هـ ب + م ت

أو يكون هـ ت + م ب > هـ ب + م ت

واخيرا يحدث هـ ت - هـ ب > م ت - م ب = ٢ ق

وحينئذ اتضح انه على حسب وجود النقطة خارج المنحنى او عليه او داخله يكون الفرق بين نصفى قطريها البوريين اصغر او مساويا او أكبر من المحور القاطع

# الفصل الثانى

## فى المماس للقطع الزائد والعمودى عليه وخطيه التقريبين

ن ٩١ النظرية الخامسة — المستقيم المماس للقطع الزائد يصنع مع نصفى القطرين البوريين لنقطة التماس زوايتين متساويتين

وهذه الخاصية مشابهة لخاصية مماس القطع الناقص وبيانها كبيان خاصية المماس للقطع الناقص المذكور

شكل ٥٦

مثلا ليكن م مَ (شكل ٥٦) مستقيما قاطعا للقطع الزائد فى نقطتين متقاربتين من بعضهما جدا ثم نعين النقطة هـ المماثلة الى البورة ب بالنسبة الى مستقيم م مَ ونوصل المستقيمات ب م ب مَ، ت م، ت مَ، هـ م، هـ مَ

واخيرا نصل المستقيم ت هـ فيتلاقى مع القاطع فى نقطة مثل ح ثم نصل

ايضا المستقيم ب ح ونقول من حيث ان خطي م ب ، م ه مائلان متساويا البعد عن موقع العمود م ى فيكونان متساويين

وبالمثل يكون خطا مَ ب ، مَ ه متساويين وخطا ح ب ، ح ه متساويين ايضا ويحدث حينئذ ان

بَ م - ه م = بَ م - ب م = ٢ م ،

بَ مَ - ه مَ = بَ مَ - ب مَ = ٢ م ،

ه بَ = بَ ح - ح ه = بَ ح - ح ب

وايضا يشاهد من مثلث ه م بَ ان

ه بَ > بَ م - ه م

ومن بعد الاستعواض يحدث بَ ح - ح ب > ٢ م

ومن هنا يعلم ان نقطة ح موجودة داخل القطع الزائد وموضوعة بين نقطتي م ، مَ فحينئذ عندما تقرب هاتان النقطتان من بعضهما الى ان يتحدا تتحد نقطة ح معهما ايضا وفي هذا الوقت يصير المستقيم القاطع مماسا وتصير نقطة ح نقطة تماس بالمنحني

وحيث ان مثلث ب ح ه لا يزال متساوي الساقين مهما تغير وضع القاطع فلا يزال العمود ح ى منصفا بالضرورة لزاوية ب ح بَ وتبقى هذه الخاصية موجودة ايضا عند النهاية اعني عندما يصير هذا القاطع مماسا ويصير ضلعا هذه الزاوية نصفي القطرين البورين لنقطة التماس وهذا هو ما اردنا بيانه

ويلزم هنا ان ننبه على ان المستقيم المماس للقطع الزائد ليس كمماس القطع الناقص منصفا للزاوية الواقعة بين احد نصفي القطرين البوريين لنقطة التماس وبين امتداد الآخر بل يكون منصفا للزاوية الواقعة بين نفس نصفي القطرين البوريين لنقطة التماس

س ٩١ د نتيجة اولى — المستقيم العمودي على منحني القطع الزائد في اي نقطة من محيطه يكون متساوي الميل على كل من نصفي القطرين البوريين المارين بهذه النقطة

مثلا اذا كان مستقيم ط طَ شكل ( ٥٧ ) مماسا للقطع الزائد فتكون زاويتا بَ م طَ ، ط م ب بناء على ما تقدم في النظرية السابقة متساويتين

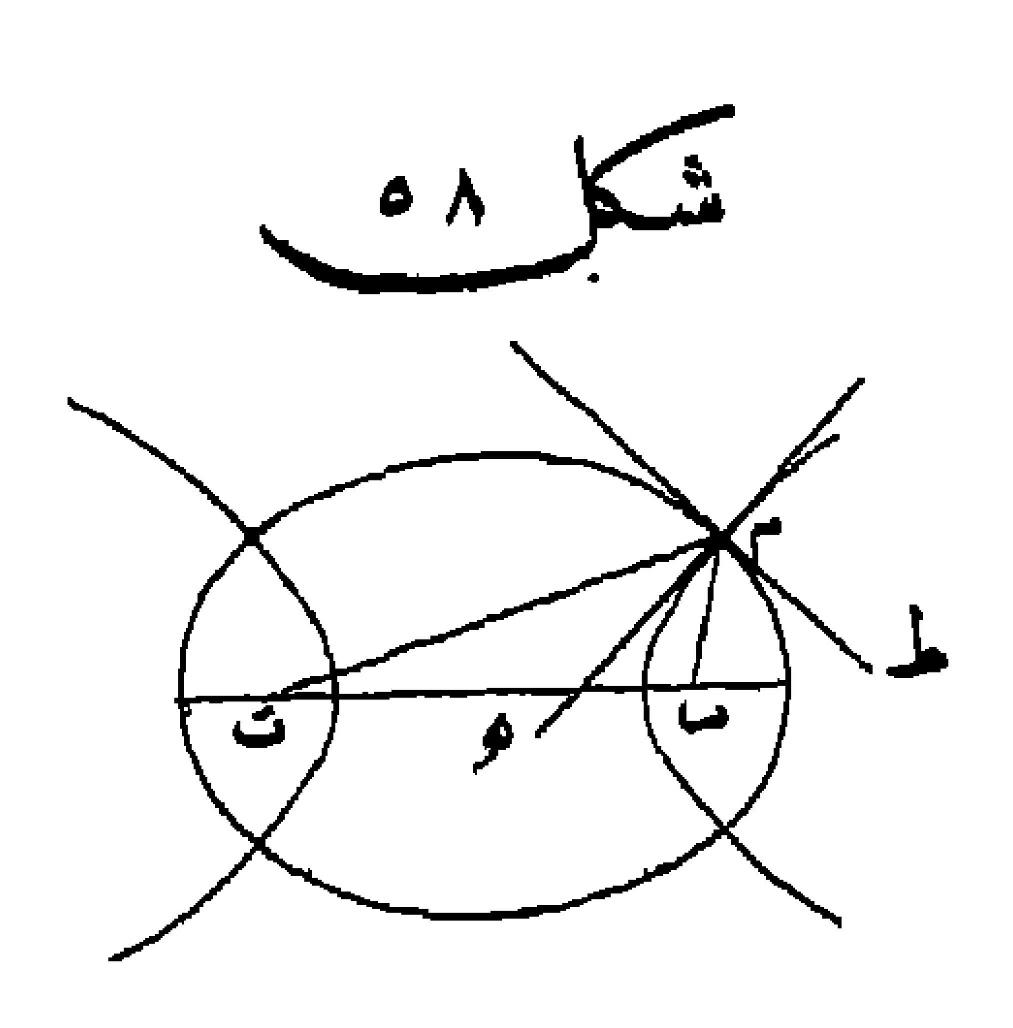
وحيث ان المستقيم العمودي على هذا المنحني في نقطة التماس م الذي هو م هـ يلزم ان
يكون بمقتضى تعريفه عموديا على ط طَ
فيكون منصفا لزاوية س م ب الواقعة
بين نصف القطر البوري ب م وبين
امتداد نصف القطر الآخر وهو تَ م
وعلى ذلك تكون زاويتا ب م هـ ,
تَ م هَـ متساويتين وهو المطلوب

شكل ٥٧

بند ٩١ نتيجة ثانية — منحنيا القطع
الناقص والزائد المشتركان في البورتين
يتقاطعان على زوايا قائمة

لانه لا يخفى ولا ان الزاوية التي يتقاطع عليها منحنيان حيثما اتفق ليست هي إلا
الزاوية الواقعة بين المستقيمين المماسين لهذين المنحنيين في نقطة تقاطعهما
فاذا تقرر هذا لنفرض ان نقطة م مثلا
من شكل (٥٨) هي نقطة مشتركة
بين قطع ناقص وقطع زائد متحدي البورتين
فاذا وصل المستقيمان ب م , تَ م
كان المستقيمان المماسان لمنحني القطع
الزائد والقطع الناقص في نقطة تقاطعهما
هما المستقيمان المنصفان لزاوية ب م تَ
وللزاوية المكملة لها وحينئذ يكون
هذان المماسان متعامدين على بعضهما وهو المطلوب

شكل ٥٨




بند ٩٢ في المرايا الزائدية — القطع الزائد له خاصية مشابهة لخاصية القطع
الناقص المتقدمة في بند (٥٢) بمعنى انه اذا فرض ان الفرع الايمن من القطع الزائد
المبين في شكل (٥٧) مكون من صفيحة مصقولة من الداخل ومن الخارج ووضع
في نقطة ب ينبوع ضوئي فجميع الاشعة الضوئية البازغة من هذه النقطة تأتي
الى العين بعد انعكاسها على سطح المنحني من الداخل لكن بحيث يظنها الرائي بازغة من
البورة الاخرى تَ التي يتخيل ان فيها ينبوعا ضوئيا وبالعكس فان الاشعة الخارجة

من ينبوع ضوئي موضوع في البورة الثانية ت والمنعكسة على السطح الخارجي من الصفيحة المصقولة تظهر انها آتية من نقطة ب ويظن ان النقطة الضوئية موجودة فيها وتحدث نفس هذه الظاهرة الطبيعية فيما اذا عوض الينبوع الضوئي بينبوع حراري أو بجسم رنان او الخ

انما يوجد فرق مهم بين خاصيتي منحنى القطع الزائد ومنحنى القطع الناقص يجب ملاحظته وهو ان الاشعة المنعكسة على منحنى القطع الناقص تمر بالبورة الثانية تحقيقا ولذا سميت هذه البورة بالحقيقيه وأما في القطع الزائد فبالعكس يعني انه لا يمر بالبورة الثانية سوى امتدادات هذه الاشعة المنعكسة بحيث لا يكون تقاطع الاشعة هنا الا تخيليا فقط ولذا سميت البورة في هذه الحالة بالبورة التخيلية

٩٣ النظرية السادسة — المحل الهندسي لمساقط بورتي القطع الزائد على مماسّاته هو محيط دائرة قطرها محوره القاطع

مثلا اذا فرض ان ط ط شكل (٥٩) مماس لهذا المنحنى في نقطة م وانزل عليه من البورة ب العمود ب ى ثم مد حتى يتلاقى مع نصف القطر البورى ت م في نقطة كنقطة هـ فبما ان المماس منصّف لزاويتي ت م ب يكون مثلث ب م هـ متساوي الساقين

شكل ٥٩

ويكون

ت هـ = ت م − م هـ = ت م − ب م = ٢ م

وبناء على ذلك يكون المستقيم و ى الواصل بين وسطي الضلعين ب هـ ، ب ت في المثلث ب ت هـ موازيا الى قاعدته وهي ت هـ ومساويا لنصف طولها أعني الى م ويكون حينئذ مقداره ثابتا وهذا دليل على ان نقطة ى موجودة على محيط الدائرة التي قطرها هو المحور القاطع وهو المطلوب

والدائرة المذكورة تسمى كما في القطع الناقص بالدائرة الاصلية

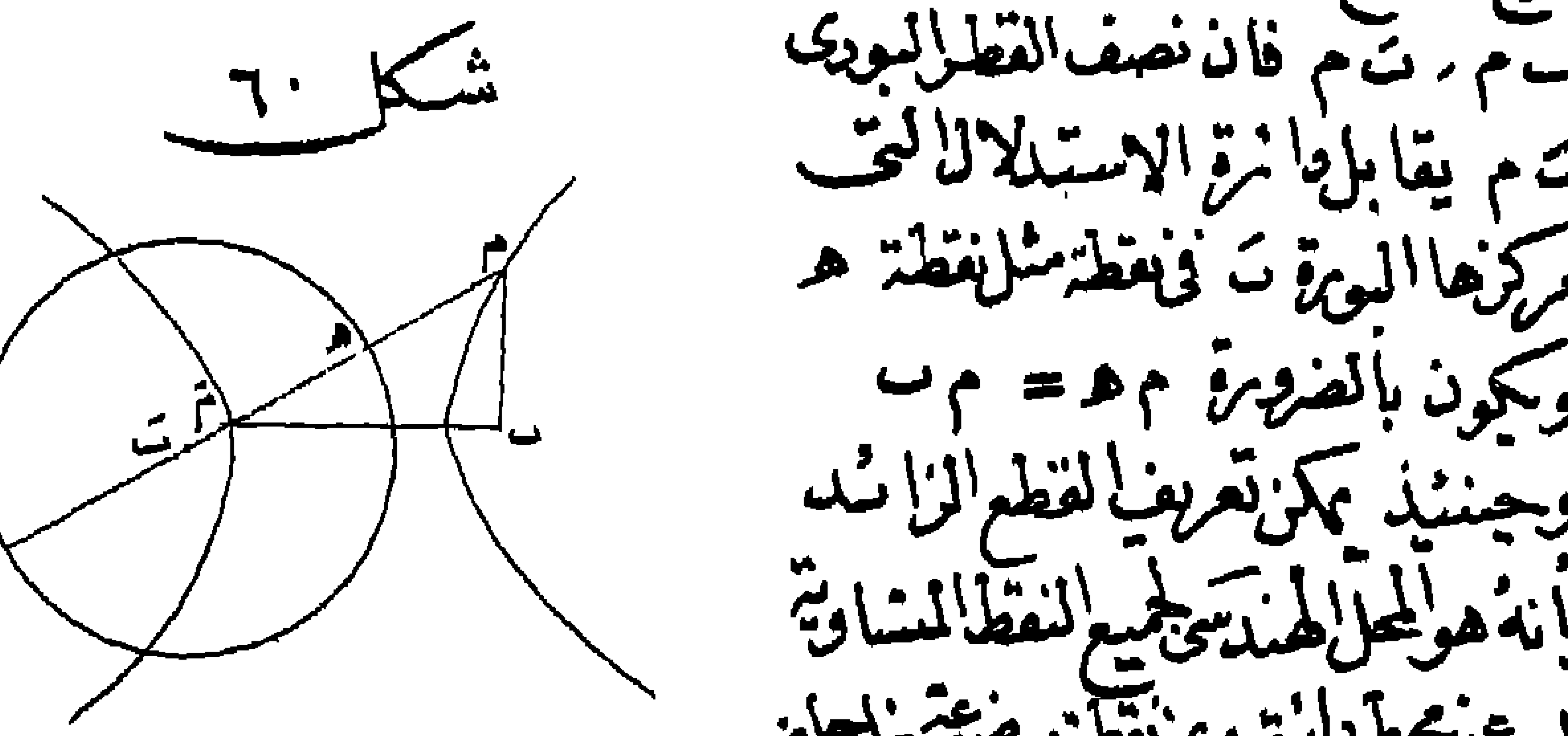
٩٤ في دائرة الاستدلال — لننبه ايضا هنا على انه يجب معرفة دائرة اخرى مهمة وهي المرسومة بجعل احدى البورتين مركزا وبنصف قطر مساوٍ الى المحور القاطع وتسمى

وتسمى دائرة الاستدلال

ومن المشاهد ان لكل قطع زائد دائرتي استدلال كما للقطع الناقص انما الفرق بين دائرتي استدلال القطع الناقص ودائرتي استدلال القطع الزائد هو ان دائرة استدلال القطع الناقص التي مركزها احدى البورتين تكون مشتملة على البورة الاخرى من داخلها وبالعكس أما في القطع الزائد فلا تكون دائرة استدلاله التي مركزها احدى البورتين مشتملة من داخلها على البورة الاخرى بل تكون تلك البورة خارجة عنها

٩٥ تعريف آخر للقطع الزائد — اذا اخذت نقطة مثل م شكل (٦٠) من فرع القطع الزائد المشتمل على البورة ب ووصل نصفا قطريها البوريان وهما ب م ، بَ م فان نصف القطر البوري بَ م يقابل دائرة الاستدلال التي مركزها البورة بَ في نقطة مثل نقطة هـ ويكون بالضرورة م هـ = م ب وحينئذ يمكن تعريف القطع الزائد بانه هو المحل الهندسي لجميع النقط المتساوية البعد عن محيط دائرة وعن نقطة موضوعة خارجة عنه

شكل ٦٠




٩٦ يمكن أن يؤخذ من هذا التعريف طريقة لرسم القطع الزائد نقطة فنقطة لكنها تكون صعبة الاجرى

٩٧ في الخطين التقريبيين — اذا نظرنا الى التعاريف المتقدمة المتعلقة بالدائرة الاصلية وبدائرتي الاستدلال رأينا انه اذا تحركت نقطة م شكل (٥٩) على القطع الزائد فان نقطة ى ترسم الدائرة الاصلية واما نقطة هـ فانها ترسم دائرة الاستدلال التي مركزها البورة بَ

لكن حيث ان مستقيمي بَ هـ ، وى باقيان على الدوام متوازيين فزاويتا وى ب ، بَ هـ ب لا تزالان متساويتين ويعلم من ذلك انه اذا صار المستقيم ب ى مماسا للدائرة الاصلية صار مماسا ايضا للدائرة الاستدلال لانه لما صارت زاوية وى ب قائمة صارت زاوية بَ هـ ب قائمة أيضا لكن في هذه الحالة ينطبق المماس م ط العمودي على وسط ب هـ على نصف القطر وى وتنتقل نقطة تماسه بالقطع الزائد التي هي نقطة تقابله بامتداد للمستقيم بَ هـ الى بعد غير محدود أعني الى ما لا نهاية وذلك لأن مستقيمي

ت هـ ، و ى متوازيان دائما

وبهذه الكيفية يحصل مستقيم مماس للقطع الزائد نقطة تماسه موضوعة على بعد لانهائى بمعنى ان نقطة التماس المذكورة لاوجود لها فى الحقيقة لكن المنحنى يقرب شيئا فشيئا من هذا المستقيم بدون ان يمسه ابدا ولذا سمى هذا المستقيم بالخط التقربى للقطع الزائد

ويقتضى ذلك يرى انه للحصول على الخط التقربى يرسم مستقيم مماس للدائرة الاصلية من البورة ب

شكل ٦١

كما فى شكل (٦١) فيكون مماسا ايضا للدائرة الاستدلال ثم نصل من المركز و الى نقطة تماس هذا المماس بالدائرة الاصلية فيكون هو الخط التقربى

ومن البديهى ان المماس الثانى للدائرة الاصلية المخرج من نقطة ب ايضا يعين لنا خطا تقربيا آخر للقطع الزائد وكذلك يشاهد من تماثل فرعى الشكل ان الخطين التقربيين للفرع الايسر هما امتدادا الخطين التقربيين للفرع الايمن وحينئذ يتضح ان لمنحنى القطع الزائد خطين تقربيين اثنين

س ٩٨ د النظرية السابعة الخطان التقربيان لمنحنى القطع الزائد هما قطرا مستطيل قاعدته المحور القاطع لهذا القطع الزائد وقطره مساويا للبعد بين البورتين

وللبرهنة على ذلك يقام من نقطة ا شكل (٦١) مستقيم عمودى على المحور القاطع ويمد على استقامته حتى يلاقى مع الخط التقربى فى نقطة مثل نقطة ع فيكون مثلثا و ب ى ، و ع ا القائما الزاوية متساويين لان فيهما زاوية حادة مشتركة وفيهما ضلع وا مساو لضلع و ى لانهما نصفا قطرى دائرة واحدة وينتج منها

منها ان وع = وب وهذا هو ما أردنا بيانه

سؤال في القطعين الزائدين المتناظرين او المزدوجين — اذا اشترك قطعان زائدان في الخطين التقربيين وكان البعدين بورتى كل منهما واحد لكن المحور القاطع لاحدهما موضوع على المحور الغير القاطع للمنحنى الثانى قيل لهما قطعان زائدان متناظران أو مزدوجان

وينتج من هذا التعريف ان القطعين الزائدين المتناظرين يلزم ان يكونا موضوعين فى الزوايا المتضادة الكائنة بين خطيهما التقربيين المشتركين وانهما فضلا عن ذلك غير متساويين لانه اذا فرض ان ه نصف المحور الغير القاطع للقطع الزائد الذى بورتاه هما ب ، بَ شكل (٦١) كان نصف المحور القاطع للقطع الزائد المناظر له وهو ء مساويا بالبداهة الى $\sqrt{حـ^{٢} - ه^{٢}}$

تنبيه فى القطع الزائد القائم — اذا فرض فى المسئلة المتقدمة ان

$$حـ^{٢} - ه^{٢} = ه^{٢}$$

علم من ذلك ان $$حـ^{٢} = ٢ ه^{٢}$$

ويكون هذان القطعان الزائدان المتناظران متساويين وفى هذه الحالة يكون مثلث واع متساوى الساقين وبناء عليه يكون الخطان التقربيان صانعين مع المحورين زاوية مقدارها ٤٥° فيصيران حينئذ متعامدين على بعضهما والقطع الزائد الذى يكون بهذه الصورة اى الذى يكون خطاه التقربيان متعامدين على بعضهما يسمى قطعا زائدا قائما

تنبيه فى رسم مماسات القطع الزائد — من حيث ان خواص المستقيم المماس للقطع الزائد مشابهة بالكلية لخواص مماس القطع الناقص فهى توصلنا بالضرورة الى استخراج طرق لرسم مماسات هذا القطع الزائد مشابهة تقريبا لطرق رسم مماسات القطع الناقص بحيث يمكن حينئذ بسبب وجود هذه المشابهة الاختصار فى التعبير عليها

## المسئلة الاولى

المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الزائد من نقطة مفروضة عليه

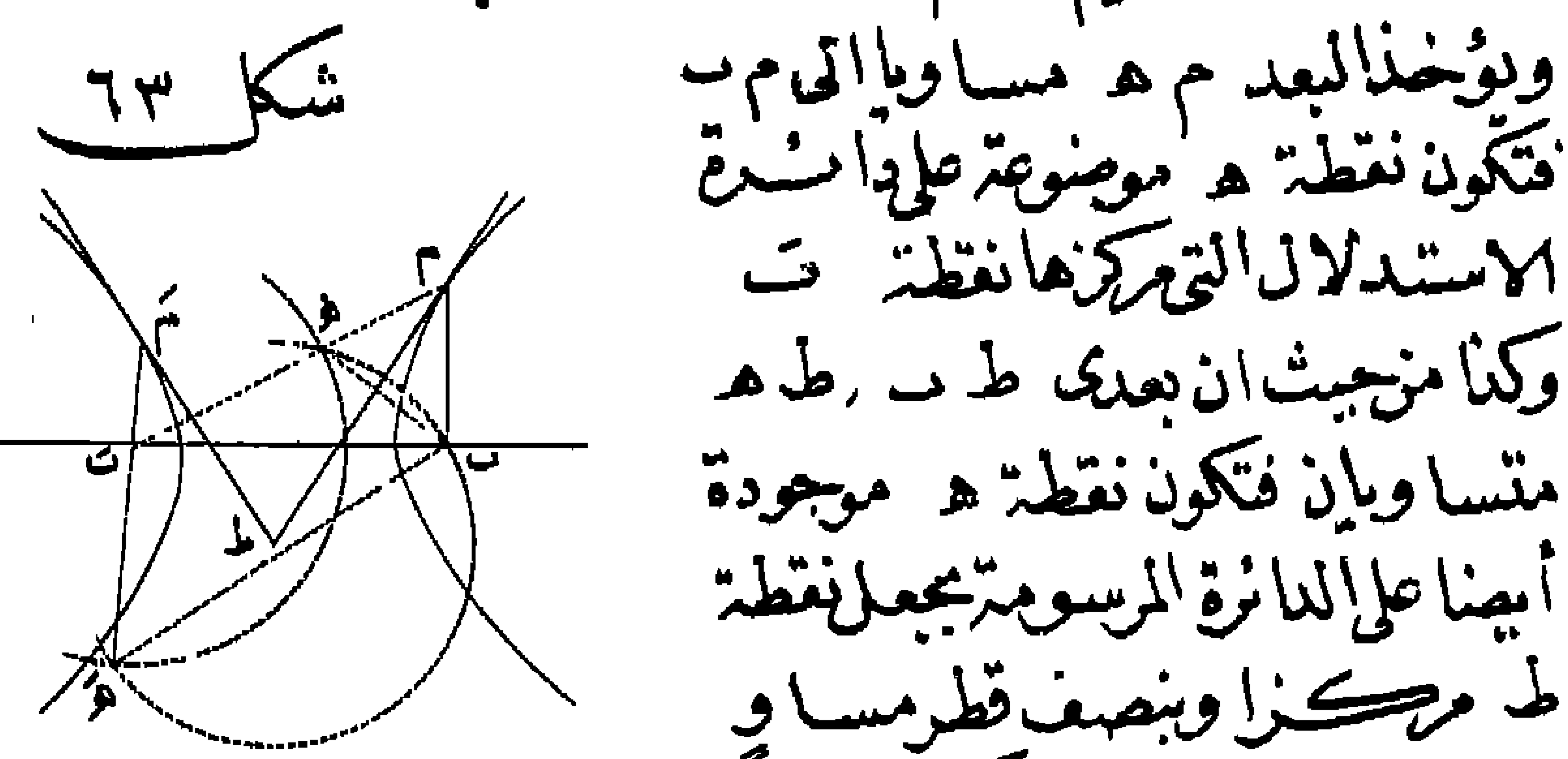
مثلا لتكن نقطة م شكل (٦٢) النقطة المعلومة فنصل خطى ب م ، بَ م والخط الثانى منهما يتلاقى مع دائرة الاستدلال فى نقطة مثل نقطة ه فاذا وصل مستقيم ب ه الذى يقطع الدائرة الاصلية فى نقطة مثل نقطة ى

شكل ٦٢

ثم وصل من نقطة التماس المعلومه
وهي م الى نقطة ب بمستقيم كان
هو المماس المطلوب
وفي حالة ما تكون هاتان الدائرتان
غير مرسومتين كما في نفس الشكل
المذكور يلزم اخذ بعد م هـ
مساويا الى م ب ثم ينزل من
نقطة م عمود على خط ب هـ
فيكون هو المماس المطلوب

## المسئلة الثانية

س ٢٠١ المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع زائد من نقطة خارجة عنه
لذلك يفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة ط هي النقطة المعلومة كما في شكل
(٦٤) وان المستقيم ط م هو المماس المطلوب



شكل ٦٣

ويؤخذ البعد م هـ مساويا الى م ب
فتكون نقطة هـ موضوعة على دائرة
الاستدلال التي مركزها نقطة ت
وكذا من حيث ان بعدى ط ب ، ط هـ
متساويان فتكون نقطة هـ موجودة
أيضا على الدائرة المرسومة بجعل نقطة
ط مركزا وبنصف قطر مساو
الى ط ب وحينئذ تكون هي نقطة
تقاطع محيطي هاتين الدائرتين ومتى علمت نقطة هـ بهذه المسابة فلا يبقى علينا
سوى ان نصل المستقيم ب هـ وننزل من نقطة ط عمودا على هذا المستقيم فيكون
هو المماس المطلوب
وحينما تكون الدائرة الاصلية مرسومة فيكفي ان نصل من نقطة ط الى نقطة
تقابل المستقيم ب هـ بهذه الدائرة اما نقطة التماس فتتعين بوصل المستقيم

ت هـ

تَ هـ ثم بمده على استقامته حتى يتلاقى مع المماس فى نقطة تكون هى نقطة التماس المطلوبة ومن المشاهد ولا بالبداهة انه يوجد لهذه المسئلة حلان لان محيطى الدائرتين يتقاطعان دائما فى نقطتين فيكون المماس الثانى هو المستقيم ط م َ وثانيا يلزم لاجل امكان حل هذه المسئلة ان يكون محيطا الدائرتين المذكوران متقاطعين لكن من المعلوم ان هذين المحيطين لا يمكن ان يكونا متداخلين لان احدهما مآر بنقطة ب الكائنة خارج المحيط الآخر فحينئذ يكفى ان يكون البعد بين مركزيهما أصغر من مجموع نصفى قطريهما بمعنى ان يكون

طَ ت < تَ هـ + ط ب

أو طَ تَ - ط ب < تَ هـ = ٢ م

وهذا يدل على انه يلزم ان تكون نقطة ط موجودة بين فرعى المنحنى كما فى بند (٨٩)

## المسئلة الثالثة

١٠٦ المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الزائد وموازٍ لاتجاه معلوم مثلا ليكن ول شكل (٦٤) الاتجاه المعلوم فاذا انزلنا من البورة ب عمودا على خط ول فهذا العمود يقابل دائرة الاستدلال المرسومة بجعل نقطة تَ مركزا فى نقطة مثل نقطة هـ ويصير المستقيم المماس المطلوب عموديا على وسط بعد ب هـ أما نقطة تماسه بالمنحنى فهى نقطة تلاقيه با متداد المستقيم تَ هـ ومن المشاهد انه يوجد لهذه المسئلة حلان لان مستقيم ب هـ يتلاقى مع دائرة الاستدلال فى نقطة ثانية مثل نقطة هَ وانه لاجل أن تكون هذه المسئلة ممكنة الحل يلزم أن يكون مستقيم ب هـ قاطعًا للدائرة الاستدلال أعنى ان يكون محصورًا داخل الزاوية ء ب ءَ المتكونة بين مماسى هذه الدائرة المخرجين من نقطة ب

شكل ٦٤

وحيث نعلم من بند (٩٧) أن الخطين التقريبين موازيان لنصفي القطرين ث ء , ث ء َ فيؤول الشرط المتقدم حينئذ الى الشرط الآتي وهو أنه يلزم أن يكون مستقيم ول محصورا في زاوية روس المتكونة بين الخطين التقريبين

وليلاحظ كما في القطع الناقص أن نقطتي م , مَ اللتين هما نقطتا تماس مماسين متوازيين يلزم أن تكونا متماثلتي الوضع بالنسبة لمركز المنحنى (انظر في بند ٦٣ الى المسئلة الثالثة)

بند ١٠٤ تنبيه — من الواضح انه يمكن اجراء هذه العمليات بدون احتياج لأن يكون منحنى القطع الزائد مرسوما

بند ١٠٥ في رسم العمودي على منحنى القطع الزائد — انظر الى بند (١٩) و (٢٠) و (٢١) في مقدمة هذا الكتاب وهناك تجد الطرق العمومية لرسم عموديات أي منحنى والقطع الزائد بالجملة

# الفصل الثالث

## في تعيين مساحة جزء من القطع الزائد وفي المجسم الزائدي

بند ١٠٦ من البديهي انه لا يمكن التصدي لتعيين مساحة سطح القطع الزائد باكمله لان هذا المنحنى ليس مقفلا ولا منتهيا بل يمكن التصدي لأخذ مساحة جزء محدود من سطح هذا المنحنى لكن حيث ان الطرق المعدة لذلك متوقفة على علوم عالية لم يكن وصل طالب دراسة المنحنيات الابتدائية اليها ولم يوجد طرق مضبوطة لهذا الخصوص فقد التزمنا باحالة ذلك على ما هو مذكور من الطرق التقريبية في بندي (١٥) , (١٦) من المقدمة

## في كيفية تولد المجسم الزائدي وفي تعيين حجمه

بند ١٠٧ اذا تصورنا ان منحنى القطع الزائد قد دار حول أحد محوريه لرأينا انه يرسم سطحا تحركيا يسمى بسطح المجسم الزائدي فاذا كان محور الدوران هو المحور الغير القاطع للمنحنى المتحرك كان بالضرورة السطح الحادث سطحا متصلا يسمى المجسم الزائدي ذا الطية وبالعكس اذا حصل الدوران حول المحور القاطع كان السطح الحادث مركبا من جزءين منعزلين عن بعضهما ويسمى المجسم الحادث بالمجسم الزائدي ذي الطيتين

بند ١٠٨ حيث ان الطرق التي بها يتعين حجم مجسم القطع الزائد بالضبط مؤسسة على العلوم العالية فلا يمكن ذكرها هنا في هذا المختصر الابتدائي انما يلزمنا هنا

ان نذكر

ان نذكر طريقة تقريبية ابتدائية بها يمكن تعيين حجم جزء من هذا المجسم وخلافه من المجسمات المحركية وهي الطريقة الآتية

مثال اذا كان المطلوب تقدير الحجم الحادث من دوران الشكل م ه ك ط شكل (٥٦) فنقسمه الى اشباه منحرفات ارتفاعاتها المتساوية صغيرة جداً بحيث يمكن اعتبارها كاشباه منحرفات مستقيمة الاضلاع وكل واحد منها يكون بدورانه مخروطا ناقصا يمكن تقدير حجمه بالسهولة فمجموع أحجام هذه المخاريط يكون أقرب الى الحجم المطلوب كلما كان الارتفاع المشترك صغيراً جداً

شكل ٦٥

# الباب الرابع

## في القطع المكافي ومجسمه وفيه فصول

## الفصل الاول

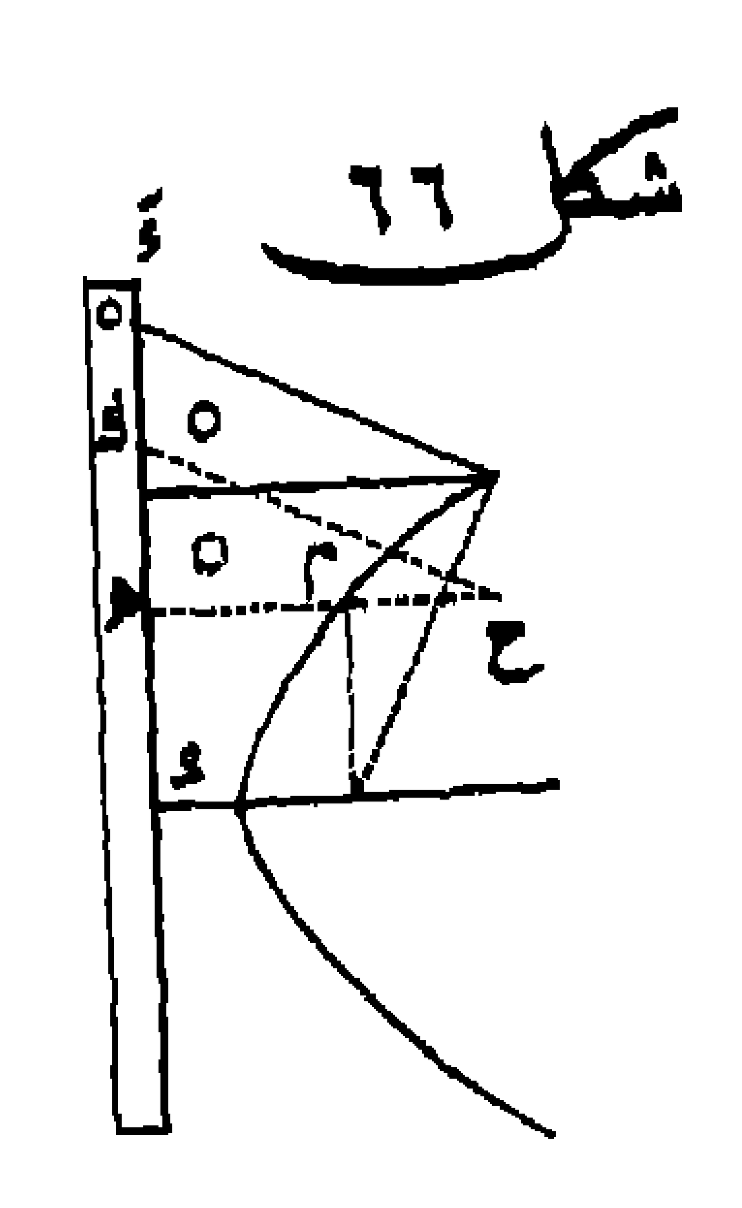
### في تعريف القطع المكافي وطرق رسمه وخواصه الهندسية

س ١٠٩ القطع المكافي هو منحن مستوى جميع نقطه متساوية البعد عن نقطة ثابتة في مستويه تسمى بورة وعن مستقيم ثابت فيه ايضاً يسمى دليلاً لهذا المنحنى

ومن البديهي ان هذا المنحنى يمتد الى ما لا نهاية لان بعدى نقطة من نقطته عن البورة وعن المستقيم الدليل يمكنهما الازدياد معاً بقدر ما يراد مع كونهما متساويين دائماً

### في طرق رسم القطع المكافي

س ١١٠ اولا طريقة رسمه بالاستمرار

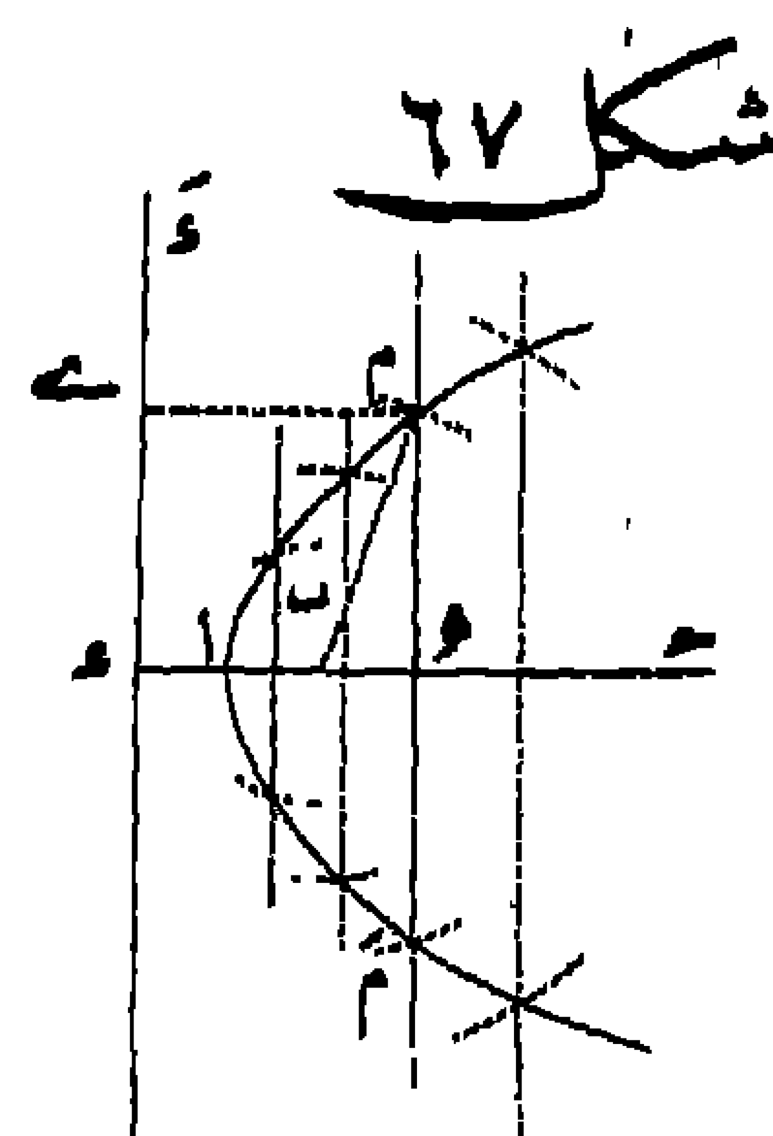



ينتج من التعريف المتقدم لهذا المنحنى طريقة سهلة لرسم جزء منه بالاستمرار ولذلك توضع مسطرة بطول الدليل ءءَ شكل (٦٦) ثم يوضع بجانب هذه المسطرة أحد الضلعين المتعامدين من المثلث الخشب ونأخذ خيطا طوله مساو للضلع الثانى العمودى على المسطرة ثم يثبت أحد طرفى هذا الخيط فى البؤرة وطرفه الثانى فى نهاية المثلث

ويزلق بعد ذلك المثلث بطول المسطرة ويحرك قلم الرسم بجانب ضلع ح هـ بحيث يكون شادا للخيط على الدوام

فمن الواضح أن القلم يرسم فى حركته جزءا من القطع المكافئ لأنه فى الواقع عندما ينتقل المثلث من وضعه الأصلى الى الوضع ح هـ ك ينقص كل من الخيط وضلع ح هـ المتساويين بكمية واحدة هى ح م

ثالثا ثانيا رسم نقطة فنقطة — لأجل رسم القطع المكافئ بالضبط تعين منه عدة نقط بواسطة الطريقة الآتية وتجمع بمنحن متصل فيكون هو القطع المكافئ مثلا اذا فرض أن نقطة ب شكل (٦٧) هو بؤرة القطع المكافئ وأن المستقيم ءءَ دليله فينزل من هذه البؤرة عمود على المستقيم الدليل كالعمود ح ب ء وتأخذ عليه نقطة اختيارية مثل نقطة هـ ثم يرسم منها مستقيم موازٍ الى الدليل ءءَ ونجعل نقطة ب مركزا وبنصف قطر مساو الى ءهـ يرسم محيط دائرة فيقطع المستقيم المذكور




فى نقطة مثل م وتكون هذه النقطة بالبداهة من نقط القطع المكافئ لأنه قد أخذ بالعمل

ب م = هـ ء = م ے

وبهذه الكيفية يمكن الحصول على عدة نقط من المنحنى بقدر ما يراد انما حيث ان محيط الدائرة يقابل المستقيم على العموم فى نقطتين فتتعين بنفس هذه العملية نقطة اخرى مثل مَ

وبالضرورة متى كانت نقطة هـ موضوعة على يمين البورة ب يكون

ب م = ء هـ > ب هـ

وبناء عليه يلزم ان يكون محيط الدائرة قاطعاً للمستقيم هـ م لكن متى كانت نقطة هـ موضوعة بين البورة والدليل لزم لحصول تقاطعهما ان يكون

ء هـ > ء ب / ٢

وحينئذ اذا نصف بعد ء ب بنقطة مثل نقطة ا ينبغى ان تكون نقطة هـ متباعدة عن الدليل بعد اكبر من بعد نقطة ا عنه

(تنبيه) من البديهى ان القطع المكافئ لا يتركب الا من فرع واحد فقط موضوع مع البورة فى جهة واحدة من المستقيم الدليل

## الخواص الهندسية للقطع المكافئ

س ١١٣ ـ (النظرية الاولى) القطع المكافئ منحن محدب

ولاثبات هذه النظرية يفعل كما فعل فى كل من القطع الناقص والزائد أعنى نبحث عن نقط تقابل مستقيم بقطع مكافئ معلوماً وبعبارة أخرى يقال المطلوب ايجاد نقطة على مستقيم معلوم بحيث تكون متساوية البعد عن نقطة اخرى ثابتة وعن مستقيم آخر معلوم

مثلا لتكن نقطة ب البورة ومستقيم ے هـ الدليل ومستقيم م مَ المستقيم المعلوم كما فى شكل (٦٨) ولنفرض ان المسألة محلولة وان نقطة م هى النقطة المطلوبة فعلى حسب منطوق المسألة يكون

ب م = م هـ

واذا بحثنا عن نقطة ٮ المماثلة للبورة ب بالنسبة لمستقيم م مَ كان ايضا

ب م = م ٮ

بحيث ان الدائرة التي مركزها نقطة م ونصف قطرها البعد سم تكون مارة بالثلاث نقط ب , ب , هـ

فضلاً عن كونها تصير مماسة للدليل في نقطة هـ وبناءً على ذلك تؤول المسألة الى مسألة أخرى حلها معلوم

وهي المطلوب رسم محيط دائرة مار بنقطتي ب , ب المعلومتين بشرط ان يكون مماساً للمستقيم المعلوم ء ءَ

شكل ٦٨

ومن حيث ان مستقيم ے هـ مماس فيحدث القانون الآتي

ے هـ² = ے ب × ے ب

وحينئذ لتعيين نقطة هـ يبحث عن الوسط المتناسب بين خطي ے ب , ے ب ويؤخذ البعد الناتج على الدليل ابتداءً من نقطة ے ولم يبق بعد ذلك سوى انه يقام من نقطة هـ عمود على خط ے هـ ويمد حتى يتلاقى مع المستقيم م مَ في نقطة تكون مركزاً للمحيط المطلوب وهي من النقط التي تحل المسألة

لكن حيث انه يمكن اخذ بعد ے هـ في جهتي نقطة ے فيرى انه يوجد نقطتان مثل م , مَ كل منهما يحل المسألة اما في حالة ما تكون نقطة ب موجودة على نفس الدليل فلا تحصل الا نقطة واحدة

واخيرا قد تكون المسألة مستحيلة الحل وذلك اذا وقعت نقطة ب في الجهة الثانية من الدليل اعني اذا لم تكن مع البورة في جهة واحدة منه

وعلى كلتا الحالات قد ظهر من هذه الاجراآت ان المسألة يكون لها في النهاية العظمى حلاّن وبناءً على ذلك يثبت ان المستقيم لا يمكنه ان يقطع القطع المكافئ في اكثر من نقطتين وهذا هو ما اردنا بيانه

## في محور القطع المكافئ وفي رأسه

١١٢٣

١١٣ النظرية الثالثة — العمود النازل من بورة القطع المكافى على دليله محور لهذا المنحنى لاننا شاهدنا انفا بند (١١١) في الطريقة الثانية لرسم هذا المنحنى ان كل قوس دائرة يعين نقطتين منه وحيث معلوم انه اذا تقاطع محيط دائرة مع مستقيم كانت نقطتا تقاطعهما متماثلتي الوضع بالنسبة للعمود المنزل من مركز تلك الدائرة على هذا المستقيم فحينئذ تكون جميع نقط هذا المنحنى متماثلة الوضع مثنى مثنى بالنسبة للعمود المنزل من البورة على الدليل ويكون هذا العمود محورا لهذا المنحنى وهو ما اردنا بيانه

نتيجة — نقطة وسط البعد الكائن بين البورة والدليل من القطع المكافى هي راس هذا المنحنى

ولبيان ذلك يقال حيث ان هذه النقطة موجودة على المحور فيكفي فقط الاثبات على انها من نقط المنحنى وهذا امر بديهي بناء على تعريف المنحنى المذكور

١١٤ في البعد الثابت للقطع المكافى — من الواضح ان منحنى القطع المكافى يصير معينا متى علم البعد الكائن بين بورته ودليله وهذا البعد هو ما يسمى بالبعد الثابت لهذا القطع المكافى

١١٥ النظرية الثالثة — منحنى القطع المكافى يقسم مستويه الى قسمين بشرط ان يكون بعد اي نقطة مفروضة داخل احدهما عن البورة اكبر من بعدها عن الدليل وبالعكس ان بعد اي نقطة تفرض داخل القسم الثاني عن البورة يكون اصغر من بعدها عن الدليل

مثلا اذا فرض ان نقطة ط شكل (٦٩) نقطة موجودة خارج القطع المكافى وانزل من هذه النقطة عمود على الدليل ثم مد حتى تلاقى مع المنحنى في نقطة كنقطة م ووصل مستقيم ب م فيكون

ب ط > ب م − م ط

لكن حيث ان ب م = م ي

فحينئذ يكون

ب ط > م ي − م ط = ي ط

شكل ٦٩

وكذا اذا كانت نقطة ط موضوعة

على شمال الدليل فمن البديهى ايضا أن يكون

ب ط > ى ط

أما اذا فرض الآن أن نقطة مثل هـ موجودة داخل المنحنى حدث من مثلث

ب م هـ أن ب هـ < ب م + م هـ

أو يكون ب هـ < ى م + م هـ = ى هـ

وبناء على هذه النظرية يتضح انه على حسب وجود النقطة خارج القطع المكافى أو عليه او داخله يكون بعدها عن الدليل أصغر او مساويا أو اكبر من بعدها عن البورة

# الفصل الثانى

## فى المماس لمنحنى القطع المكافى والعمودى عليه

١١٦ـ النظرية الرابعة — المستقيم المماس للقطع المكافى يصنع مع كل من نصف القطر البورى لنقطة التماس والمستقيم المرسوم منها بالتوازى الى المحور زاويتين متساويتين

مثلا ليكن المستقيم م مَ شكل (٧٠) قاطعا للقطع المكافى فى نقطتين متقاربتين من بعضهما فصل نصفى قطريهما البوريين وينزل منهما عمودان على الدليل كالعمودين م ط ، مَ طَ ثم يبحث عن نقطة هـ المماثلة للبورة بالنسبة للمستقيم القاطع وينزل منها عمود كالعمود هـ ر على الدليل

واخيرا نوصل المستقيمات م هـ ، مَ هـ ، ح ب فيحدث حينئذ

م هـ = م ب = م ط ،

مَ هـ = مَ ب = مَ طَ ،

ح هـ = ح ب

ومن البديهى ايضا ان تكون نقطة هـ موجودة فى جهة واحدة مع البورة بالنسبة الى الدليل كما فى بند (١١٢) وبناء على ذلك يكون

ح هـ < ح ر

أو

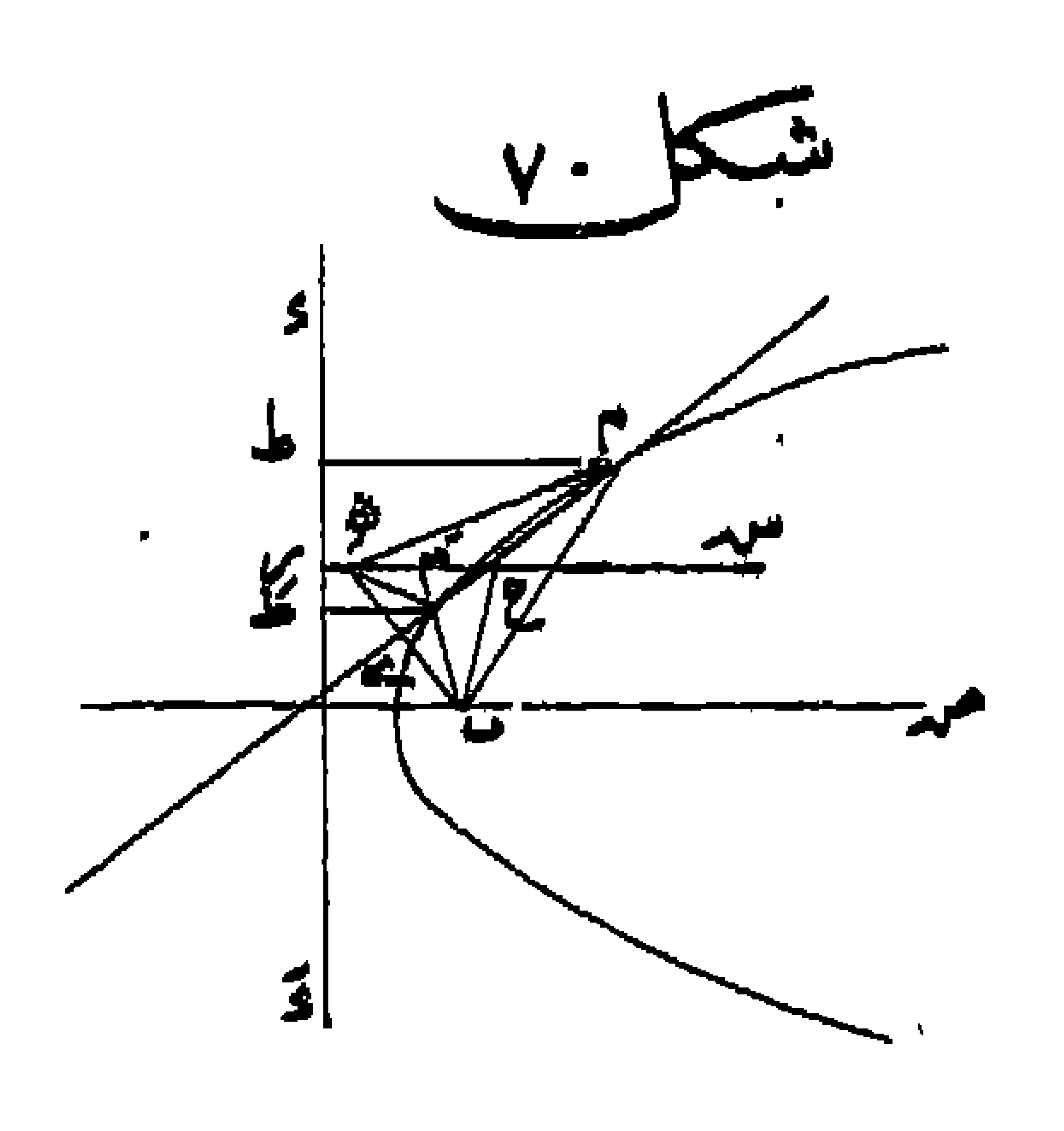
ح ب < ح ر

فاذن تكون نقطة ح موجودة داخل القطع المكافى وبناء عليه

تكون

تكون واقعة بين نقطتي م رَمَ وينتج من ذلك انه متى انطبقت نقطتا م رَمَ على بعضهما وصارتا نقطة واحدة تتحد نقطة ح معهما وتصير نقطة تماس للماس ومتى تقرر هذا يقال حيث ان مثلث ح هـ ب متساوى الساقين فيكون القاطع م مَ العمودى على قاعدته منصفا لزاوية

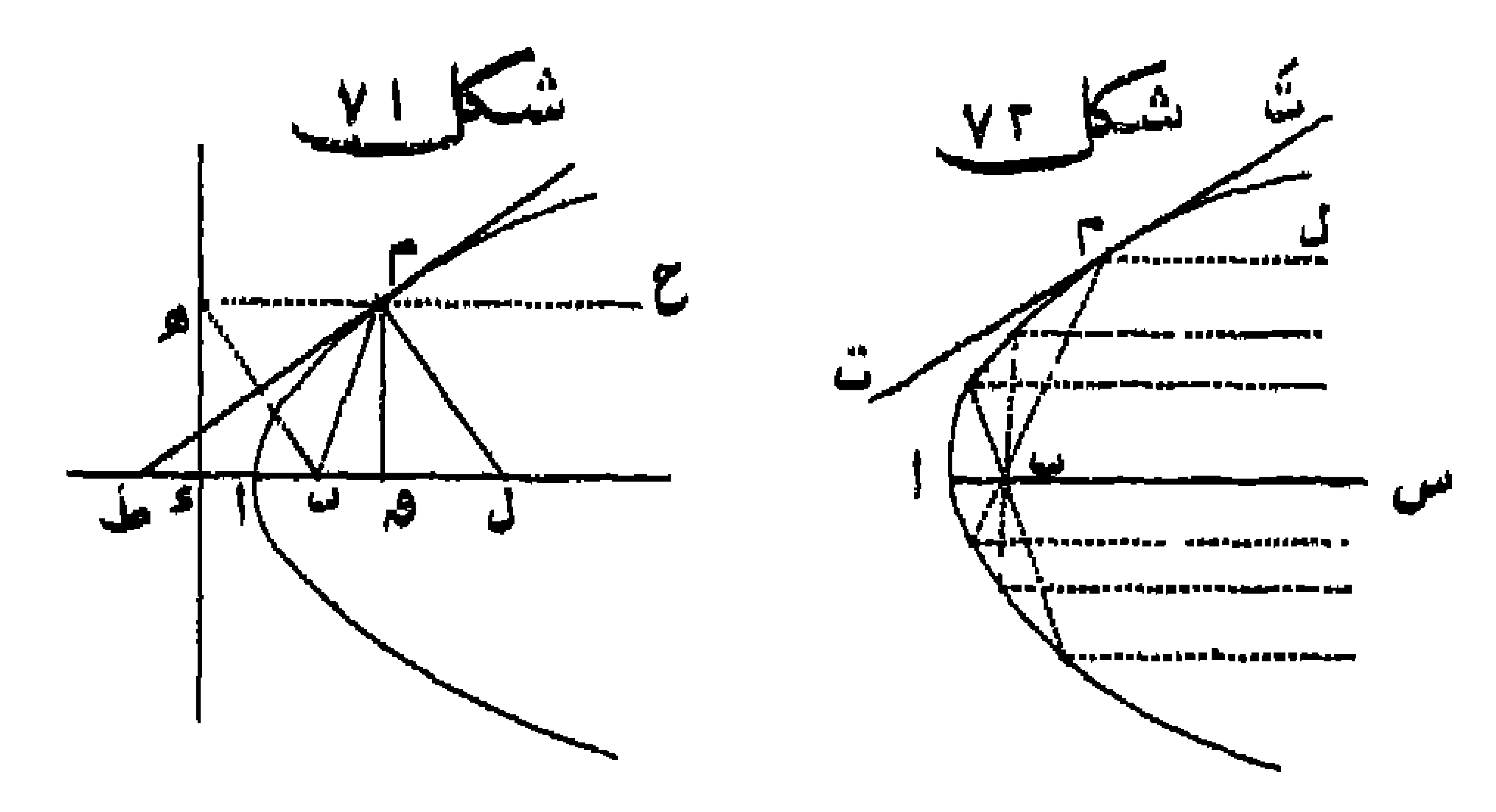
شكل ٧٠



هـ ح ب وبناء على ذلك تكون زاويتا ى ح ب رم ح س متساويتين لان زاوية م ح س = ى ح هـ لتقابلهما بالرؤس وحيث ان هذه الخاصة حاصلة مهما كان وضع القاطع فتكون صحيحة ايضا متى صار هذا المستقيم مماسا للمنحنى وهذا هو ما اردنا بيانه

س ١١٧ نتيجة أولى — المستقيم العمودى على القطع المكافى فى اى نقطة من نقطه يقسم الزاوية الكائنة بين نصف القطر البورى لنقطة التماس وبين المستقيم المرسوم منها بالتوازى للمحور الى قسمين متساويين مثلا ليكن مستقيم ط م شكل (٧١) مماسا للقطع المكافى ومستقيم م ل عموديا عليه فبناء على النظرية المتقدمة تكون زاويتا ط م ب ر هـ م ط متساويتين وحينئذ لا شك ان تكون زاويتا ب م ل ر ح م ل متساويتين ايضا

س ١١٨ فى المرايات المكافية اذا فرض ان القطع المكافى عبارة عن صفيحة ضيقة مصقولة ووضع فى نقطة ب شكل (٧٢) التى هى بورة ينبوع ضوئى او ينبوع حرارى فان الاشعة الحرارية المنعكسة على الوجه الداخلى من هذا القطع المكافى تتجه فى اتجاهات موازية الى المحور وبالعكس اذا وضع ينبوع ضوئى على المحور ا س فى بعد عظيم من المنحنى بحيث يمكن اعتبار الاشعة الآتية منه موازية للمحور فان هذه الاشعة تجتمع فى البورة ب بعد انعكاسها على داخل المنحنى




وكذلك اذا قذفت ( بلية) مرنة أعنى كرة مرنه من البورة ب في اتجاه حيثما اتفق مثل ب م صدت هذه البلية بواسطة القطع المكافى وتأخذ اتجاها مثل م ل موازيا الى المحور وبالعكس اذا قذفت الكرة في اتجاه مواز للمحور فانها تمر بالبورة بعد انعكاسها على المنحنى
واما في حالة ما يكون المنحنى مصقولا من الخارج وسقطت عليه اشعة موازية الى المحور تفرقت بعد انعكاسها عليه كما اذا كانت خارجة من البورة لكن في هذه الحالة لا تكون نفس الاشعة هي المارة بالبورة بل امتداداتها فقط ويتكون حينئذ في هذه النقطة بورة تخيلية
١١٩ نتيجة ثانية نقطتا تماس اى مماس للقطع المكافى ونقطة تلاقى هذا المماس بالمحور تكونان متساويتى البعد عن البورة وكذلك تكون نقطتا تقابل العمودى على القطع المكافى به وبمحوره متساويتى البعد عن البورة أيضا
فلاثبات الحالة الاولى يقال حيث ان زاويتى هم ط , ب م ط شكل (٧١) متساويتان وان زاويتى هم ط , م ط ب متساويتان أيضا لانهما متبادلتان داخلتان فحينئذ يكون مثلث ط ب م متساوى الساقين ويكون ب ط = ب م وهو المطلوب
ولاثبات الحالة الثانية يقال حيث ان مثلث ط م ل قائم الزاوية فتكون

ط + ل = ط م ب + ب م ل

وبما ان زاوية ط = ط م ب فتكون زاوية ل = ب م ل

ويكون
س م = ب ل

س ١٢١ د تحت العمودى — تحت العمودى هو مسقط الجزء من العمودى المحصور بين المنحنى والمحور على نفس هذا المحور فبناءً على هذا التعريف يكون تحت العمودى الموجود فى شكل (٧١) هو بعد ه ل

نتيجة ثالثة — تحت العمودى لأى قطع مكافئ يكون ثابتا ومساويا لبعده الثابت

لانه من المعلوم أن مستقيم ب هـ شكل (٧١) عمود على المماس فيكون بناء على ذلك موازيا للعمودى على المنحنى ويصير حينئذ الشكل م هـ ب ل شكلا متوازى الاضلاع ويؤخذ منه أن بعد

ب هـ = م ل

اذا تقرر هذا يكون مثلثا هـ د ب ، م ه ل القائما الزاوية متساويين لان وتريهما متساويان وفيهما ضلع د هـ = م ه وينتج منهما أن

ه ل = د ب

وهذا هو ما اردنا بيانه

س ١٢١ د تحت المماس — تحت المماس هو مسقط الجزء من المماس المحصور بين المحور ونقطة التماس على نفس هذا المحور

نتيجة رابعة — تحت مماس اى قطع مكافئ يكون منصفا على الدوام براس هذا المنحنى

لانه لما كانت نقطة ب شكل (٧١) هى وسط البعد ط ل وكان بعد ه ل مساويا لبعد د ب فيكون بالبداهة

وحيث أن
د ط = ب ه
د ا = ا ب

فاذا جمعنا هاتين المتساويتين على بعضهما طرفا بطرف كان

ا ط = ا ه

وهذا هو ما اردنا بيانه

س ١٢٢ د النظرية الخامسة — المحل الهندسى لمساقط بورة القطع المكافئ على مماساته المختلفة هو المستقيم المماس لهذا المنحنى فى رأسه

ولبيان ذلك ينزل من نقطة كنقطة م مثلاً شكل (٧٣) عمود مثل م ه على الدليل ويوصل خط ب ه فيكون عمودياً على المماس م ط بمقتضى بند (١١٦) بحيث تكون نقطة ح مسقطاً للبورة على المماس فاذا وصل الآن مستقيم ا ح شوهد ان هذا المستقيم واصل بين وسطي ضلعي المثلث ه ء ب فيكون حينئذ موازياً الى ضلعه الثالث ء ه وبناء عليه يكون عمودياً على المحور ومماساً للمنحنى في نقطة رأسه بمقتضى بند (١١) وبذلك يثبت المطلوب

تنبيه — يشاهد مما تقدم أن دليل القطع المكافي والمماس له في نقطة رأسه هما بالنسبة له بمنزلة دائرة الاستدلال والدائرة الاصلية بالنسبة لمنحني القطع الناقص والزائد

شكل ٧٣

بند النظرية السادسة — في كل قطع مكافي نسبة مربعات أوتاره العمودية على المحور الى بعضها كنسبة ابعادها عن الرأس

مثلاً اذا كان م مَ شكل (٧٤) وتراً عمودياً على المحور تكون نقطة ه وسطاً لهذا الوتر بمقتضى بند (١١١) لكن حيث ان مثلث ط م ل قائم الزاوية في م فيكون عمود م ه وسطاً متناسباً بين سهمي وتره ويحدث حينئذ

$$\overline{م ه}^2 = ط ه \times ه ل$$

ومن حيث ان ه ل مساو للبعد الثابت المرموز له بحرف ع وذلك بمقتضى بند (١٢٠) وكذا من حيث ان بعد ط ه ضعف بعد ا ه بمقتضى بند (١٢١) فتؤل المتساوية المتقدمة الى الصورة الآتية

$$\overline{م ه}^2 = ٢ ع \times ا ه$$

وعليه يكون

$$\overline{م مَ}^2 = ٨ ع \times ا ه$$

واخيرا

وأخيراً يكون

$$\frac{\overline{م م}^2}{ا هـ} = ٨ ع$$

شكل ٧٤

وحينئذ يعلم ان النسبة بين مربع م ى وتر وبين بعده عن الراس تكون ثابتة دائماً وهذا هو ما اردنا بيانه

نتيجة الوتر المقام عمودياً على المحور من البورة يكون مساوياً الى ضعف البعد الثابت

مثلاً اذا كان حـ حَ هو الوتر المذكور فمقتضى النظرية المتقدمة يكون

$$\frac{\overline{حـ حَ}^2}{ا ب} = ٨ ع$$

ولكن حيث ان ا ب = ½ ع

فحينئذ يكون

$\overline{حـ حَ}^2 = ٤ ع^2$ أو حـ حَ = ٢ ع

## في رسم المستقيمات المماسة

## المسألة الأولى

١٢٤ المطلوب مد مستقيم مماس للقطع المكافئ من نقطة مفروضة عليه

شكل ٧٥

مثلاً اذا كانت نقطة م شكل (٧٥) هي النقطة المعلومة فيوصل نصف قطرها البورى م ب وينزل منها عمود مثل م هـ على الدليل ثم تنصف زاوية

هـ م ب  بمستقيم فيكون هو المطلوب
والاسهل ان يقام من رأس المنحنى وهى نقطة ا عمود على المحور ويوصل
خط ب هـ فيكون المماس المطلوب عبارة عن المستقيم الواصل من نقطة م
الى نقطة ے التى هى نقطة تلاقى المستقيمين المتقدمين وبهذه الكيفية
يستغنى الحال عن تقسيم الزاوية الى قسمين متساويين وذلك فضلا عن
كون المستقيم اے يستعمل لرسم جميع المماسات التى يراد رسمها عند الاقتضاء

## المسألة الثانية

شكل المطلوب مد مستقيم مماس للقطع المكافى من نقطة خارجة عنه
لذلك يفرض ان المسألة محلولة
وان نقطة ط هى النقطة المعلومة
وان مستقيم ط م شكل (٧٦)
هو المماس للمنحنى فى نقطة مثل
نقطة م ثم ينزل العمود ب هـ
ويوصل خطا ط ب ، ط هـ
فيكونان متساويين
بحيث انه يمكن تعيين نقطة هـ
برسم قوس دائرة مركزه نقطة

شكل ٧٦

ط وبنصف قطر مساو الى ط ب ومتى تعينت نقطة هـ نصل منها
الى نقطة ب ولا يبقى سوى ان ينزل من نقطة ط عمود على مستقيم ب هـ
او يوصل من نقطة ط الى نقطة تقاطع مستقيم ب هـ بالمماس للمنحنى
فى نقطة رأسه • اما نقطة التماس فانها تتعين بتقاطع المماس مع العمود
المقام من نقطة هـ على الدليل
وكذلك من حيث ان قوس الدائرة متقاطع مع الدليل فى نقطة ثانية مثل
هَ فيوجد بناء على ذلك مماس ثان مثل ط مَ للمنحنى
ولاجل امكان حل هذه المسألة يلزم ان يكون قوس الدائرة متقاطعا مع
الدليل اعنى يلزم ان تكون نقطة ط من خارج المنحنى كما فى بند (١١٥)

المسألة

## المسألة الثالثة

ش١٢٦ند المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع مكافى وموازٍ لمستقيم معلوم مثلا ليكن خط ك ل هو المستقيم المعلوم شكل (٧٧) فاذا انزل من البورة ب عمود على المماس كان هذا المستقيم عموديا ايضا على ك ل وبناء على ذلك يكون هذا العمود معين الوضع وتعلم ايضا نقطة ﻫ التى هى نقطة تلاقيه مع الدليل وحينئذ يكون المماس المطلوب هو العمود المقام على وسط مستقيم ب ﻫ اما نقطة تماسه فتتعين كما تقدم بمد من نقطة ﻫ مستقيم موازيا الى المحور

شكل ٧٧



ومن البديهى انه لا يكون لهذه المسألة الا حلا واحدا ما دام المستقيم المعلوم ك ل غير موازٍ الى المحور اما اذا كان موازيا الى المحور فتكون المسألة غير ممكنة الحل لان مستقيم ب ﻫ يصير فى هذه الحالة موازيا الى الدليل وتصير نقطة ﻫ على بعد غير محدود

ش١٢٧ند (تنبيه) من حيث ان الطرق الثلاثة المتقدمة لا تستلزم ان يكون المنحنى مرسوما من قبل فيمكن حينئذ استعمالها لضبط رسم المنحنى

ش١٢٨ند (فى رسم العموديات) ما صرح به فى المقدمة بند (١٩) و (٢٠) و (٢١) هو كاف لهذا الخصوص ولذلك قد اقتصرنا عليه هنا لكن لا بأس من ذكر حل المسألة الآتية حيث انه سهل جدا وهى المعلوم نقطة على محور القطع المكافى والمطلوب مد مستقيم عمودى على ذلك المنحنى منها

مثلا لنفرض ان نقطة ل شكل (٧١) المتقدم هى النقطة المعلومة فيؤخذ على المحور بالابتداء من نقطة ل جهة راس المنحنى بعد ل م

مساويا للبعد الثابت ويقام من نقطة ه عمود كالعمود ه م فيتقاطع
مع المنحنى في نقطة م تكون هي نقطة تقاطع العمودى المطلوب بالمنحنى
وحينئذ لا يبقى سوى ان يوصل المستقيم ل م فيكون هو العمودى
على المنحنى المار بنقطة ل
لكن من حيث ان العمود م ه يقابل القطع المكافىء في نقطة ثانية
فيحدث عمودى آخر مماثل للعمود الاول واخيرا حيث ان محور القطع المكافىء
هو احد عموديات فيشاهد حينئذ انه يمكن مد ثلاث عموديات على ذلك
المنحنى من نقطة ل
اما اذا لم يكن المنحنى مرسوما من قبل فلتعيين نقطة م والنقطة المماثلة
لها يرسم قوس دائرة مركزه البورة ونصف قطره بعد د ه

## في اقطار القطع المكافىء

١٢٩ النظرية السابعة — القطع المكافىء يمكن اعتباره نهاية
لقطع ناقص بقيت احدى بورتيه والراس المجاورة لها على حالهما اما
بورته وراسه الآخرين فقد بعدتا الى ما لا نهاية
ولنعتبر مثلا قطعا ناقصا كالمرسوم في شكل (٧٨) ونفرض ان راسه ا والبورة
المجاورة لها بقيتا ثابتتين

شكل ٧٨

اما راسه الاخرى آ وبورته
الثانية ت والمركز قد
بعدت الى ما لا نهاية فنجد
انه بمجرد ازدياد المحور ا آ
يستطيل هذا المنحنى شيئا
فشيئا وتؤول دائرة استدلاله
المرسومة بجعل نقطة ت
مركزا الى دائرة انحناؤها
يميل الى الاستقامة شيئا
فشيئا لتتحد مع المماس لها في نقطة د ففي نهاية الامر تؤول هذه الدائرة
الى

الى مستقيم مثل ح ح عمودى على المحور ويصير حينئذ القطع الناقص الذى هو المحل الهندسى للنقط المتساوية البعد عن البورة ب وعن دائرة الاستدلال كما هو مقرر ببند (٥٥) منحنيا لجميع نقط متساوية البعد عن البورة ب وعن مستقيم ح ح اعنى قطعا مكافئا

ومثل ذلك يمكن ايضا بيان انه يمكن اعتبار القطع المكافئ ايضا نهاية للقطع الزائد الذى بقيت احدى بورتيه والراس المجاورة لها ثابتتين وبعدت راسه الاخرى الى ما لا نهاية

وبناء على هذه النظرية يمكننا استنتاج اغلب خواص القطع المكافئ من الخواص المماثلة لها فى القطع الناقص الا انه لا ينبغى تطبيق هذه الطريقة المستجدة على ما سبق بيانه من خواص القطع المكافئ اذ لا صعوبة فى تطبيقها عليها وانما نستعملها فيما سنشرع فى بيانه من الخواص المستجدة لهذا المنحنى

بند ١٢٠ النظرية الثامنة — جميع اقطار القطع المكافئ تكون موازية الى محوره

ولبيان ذلك يقال من المعلوم ان كل مستقيم مار بمركز القطع الناقص هو محور له وان ذلك يبقى صحيحا مهما كان شكل القطع الناقص كما فى بند (٦٥) وحينئذ تبقى هذه الخاصية موجودة ايضا فى حالة اعتبار القطع الناقص النهائى اعنى القطع المكافئ لكن لا يخفى انه متى بعد مركز القطع الناقص الى ما لا نهاية صارت المستقيمات المارة بهذه النقطة موازية الى المحور وهو المطلوب

ومن ذلك يشاهد انه لما كانت جميع اقطار القطع المكافئ متوازية فلا يكون لهذا المنحنى اقطار مزدوجة الاتجاه مع بعضها مثنى كما فى القطع الناقص

بند ١٢١ لاجل استنباط بعض منافع من خواص اقطار القطع المكافئ ينبغى اولا معرفة حل المسائل الآتية التى سنتصدى الآن لذكرها

## المسالة الاولى

بند ١٢٢ المطلوب تعيين القطر المزاوج لاتجاه معلوم

من المعلوم انه يكفى لحل هذه المسالة رسم وترموازٍ للاتجاه المعلوم

ثم ينصف هذا الوتر بنقطة ويرسم منها مستقيم موازيا الى المحور وفي حالة ما يكون القطع المكافي غير مرسوم يلزم اولا تعيين نهايتي هذا الوتر بواسطة الطريقة المتقدمة في بند (١١٢)

## المسألة الثانية

بند ١٣٢ المطلوب ايجاد الاتجاه المزاوج لقطر معلوم

مثلا اذا كان مستقيم آسَ هو القطر المعلوم شكل (٧٩) فيوصل من نقطة آ الى نقطة اختيارية من المنحني كنقطة ء ويمد المستقيم الموصول على استقامته ويؤخذ عليه بعد آحـ مساويا للبعد آء ثم يرسم من نقطة حـ مستقيم موازٍ الى المحور فيقطع المنحني في نقطة كنقطة ل واذا وصل خط ء ل كان منقسما بمستقيم آسَ الى قسمين متساويين واذن يكون ء ل هو الاتجاه المطلوب

شكل ٧٩

بند ١٣٣ حيث ان المستقيم المماس للقطع المكافي يكون دائما موازيا الى الاوتار المزدوجة مع القطر المار بنقطة التماس فحينئذ يمكن بواسطة حل المسألتين المتقدمتين ايجاد المستقيم المماس لهذا المنحني في نقطة مفروضة عليه او الموازي لاتجاه معلوم الا انه لا ينبغي تفضيل هاتين الطريقتين عن الطريقتين اللتين سبق بيانهما في بند (١٢١) و (١٢٦) ومع ذلك فانه لا يمكن الاستغناء عنهما بحالة ما يكون القطع المكافي مرسوما ولم يعلم بورته ولا دليله

اما في حالة ما يكون اتجاه المحور مجهولا ايضا فينبغي اولا الاستعانة على ايجاده بمعرفة المسالة الاتية

## المسألة الثالثة

بند ١٣٤

بند ١٣٤ المطلوب ايجاد كل من بورة ومحور قطع مكافئ معلوم
لذلك يرسم وتران متوازيان كالوترين ب ح , ك ل شكل (٨٠)
ثم يوصل بين وسطيهما وهما و , وَ بمستقيم فيكون المستقيم و وَ
موازيا الى المحور وحينئذ اذا رسم وتر مثل ح حَ عمودى على و وَ
ثم رسم من وسطه مستقيم ا ر موازيا الى و وَ تحصل المحور المطلوب
وحينئذ يبقى علينا ايجاد البورة
ولاجل الوصول الى ذلك
يرسم المماس للمنحنى فى نقطة آ
الذى يكون بالضرورة موازيا
الى وترى ب ح , ك ل
ثم نتذكر ان المثلث المتكون
من المحور والمماس ونصف
القطر البورى لنقطة التماس
يكون بمقتضى بند (١١٩)
متساوى الساقين

شكل ٨٠

وحينئذ يقام من وسط آ ط عمود فيتقاطع مع المحور فى نقطة تكون هى
البورة ب ولتعيين نقطة من الدليل يؤخذ على هذا العمود البعد ص هـ مساويا
الى البعد ص ب فاذا انزل من نقطة هـ عمود على المحور كان هو الدليل المطلوب

بند ١٣٥ بناء على ما تقرر فى بند (١٢) من المقدمة يعلم انه اذا صار
القاطعان ل ح , ك ب مماسين للمنحنى فانهما لا يزالان متقاطعين على
القطر آ وَ المزدوج الاتجاه مع الوتر ح ب

بند ١٣٦ اذا رسم المستقيم المماس للمنحنى فى نقطة آ كان بالبداهة موازيا
الى الوترين ب ح , ك ل ومنقسما بقطر آ وَ الى قسمين متساويين
بحيث يكون

ف آ = آ لا

وحيث ان هذه المتساوية تبقى موجودة دائما مهما كان البعد بين الوترين
ب ح , ك ل فتكون موجودة ايضا عند النهاية وحينئذ يمكن ان يقال

النظرية التاسعة — اذا كان المعلوم مماسين لقطع مكافئ واخذ مماس ثالث موازا لى وتر تماس المماسين الاولين اقول ان جزء هذا المماس الثالث المحصور بين هذين المماسين يكون منقسما بنقطة تماسه الى قسمين متساويين

١٤٧ بند هذه النظرية المتقدمة ليست الا حالة خصوصية من النظرية الآتية التي لها تطبيقات عديدة

النظرية العاشرة — اذا وجدت ثلاث مماسات لقطع مكافئ واحد فاقول ان كل واحد منها يحدد على الاثنين الاخرين اربعة اجزا متناسبة تناسبا عكسيا

شكل ٨١

مثلا اذا فرض ان م ا ، ا ن ، ب ح (شكل ٨١) هي ثلاث مماسات لقطع مكافئ وكان المطلوب الاثبات على صحة وقوع التناسب الآتي

ن ح : ح ا :: ا ب : ب م

فلذلك نرسم الثلاثة اوتار المارة بنقط التماس ونعلم أوساطها بثلاثة نقط مثل ء ، ے ، ه

ونوصل الثلاثة مستقيمات ا ء ، ب ے ، ح ه فتكون موازية الى محور القطع المكافئ وذلك هو مقتضى بند (١٢٥) وبناء عليه تكون هذه المستقيمات موازية ايضا لبعضها بعضا ويحدث حينئذ ان

ن ح : ح ا :: ن ه : ه ء ...... [١]

وكذا ا ب : ب م :: ء ح : م ح ...... [٢]

لكن من المعلوم ان ه ء = ن ء — ن ه

كذا معلوم ان نقطة ء هي وسط بعد م ن

وحيث ان المستقيم ه ه موازالى ط ك الذى هو قاعدة مثلث

ن ط لـ ومار بنقطة هـ وسط بعـــد ط ن
فينتج من ذلك ان نقطة هـ تكون هي وسط بعد ن لـ
وحينئذ يكون

ن ء = م ء ... [٣]
ن هـ = هـ لـ

وبناء عليه يحدث

هـ ء = م ء - هـ لـ

أو

هـ ء = م لـ + لـ ء -(لـ ء+هـ ء) = م لـ - هـ ء

واخيراً يكون

٢ هـ ء = م لـ

ومن جهة اخرى حيث ان المستقيم ء ح الموازى الى ط لـ
الذى هو قاعدة مثلث م ط لـ ماربوسط ط م
فبناء على ذلك تكون نقطة ح وسطا للبعد م لـ وحينئذ
يكون

م لـ = ٢ م ح

وتبعا لذلك يكون

هـ ء = م ح ... [٤]

وايضا من حيث ان

ن هـ = ن ء - هـ ء

فيحدث بناء على متساويتى [٣] , [٤] أن

ن هـ = ن ء - م ح = ء ح

وعلى مقتضى ذلك يحدث التناسب الاتى

ن هـ : هـ ء :: ء ح : م ح

وحيث انه بين تناسبى [١] , [٢] نسبة مشتركة
فيتركب من النسبتين الاخيرتين تناسب بحيث يكون

هـ ح : ح ا : : ا ب : ب م

وهو المطلوب

وبمثل ذلك يبرهن على ان نسبة

ط ا : ا ح : : ح ب : ب ط

وكذلك يبرهن على أن نسبة

م ا : ا ب : : ب ح : ح ط

س ١٣٨ نتيجة — اذا وجدت جملة مستقيمات مماسة لقطع مكافئ واحد فاقول ان كل اثنين اختياريين من هذه المماسات يكونان منقسمين بالمماسات الأخرى الى أجزاء متناسبة مثلاً اذا فرض

شكل ٨٢



أن المستقيمات ا ط ، ح ه ، ى ك ، ل م ، الخ مماسة لقطع مكافئ كما في شكل (٨٢) واعتبرنا منها الثلاثة مماسات ا ط ، ط ف ، ح ه فيحدث بناء على ما تقرر في النظرية السابقة

أن نسبة ا ح : ح ط : : ط ه : ه ف

وبتغيير الوسطين ببعضهما وملاحظة ان نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التاليين في التناسب الجديد هي كنسبة أى مقدم الى تاليه يحدث

ا ح : ط ه : : ح ط : ه ف : : ا ط : ط ف

فاذا اعتبرنا المماس ى ك يحدث أيضا أن

ك

ا ب : ط ك :: ب ط : ك ه :: ا ط : ط ه

وباعتبار المماس لم يحدث بالمثل أن

ا ل : ط م :: ل ط : م ه :: ا ط : ط ه

واخيراً باعتبار المماس ن و يكون

ا ن : ط و :: ن ط : و ه :: ا ط : ط ه

وحيث انه يوجد بين جميع هذه المتناسبات نسبة مشتركة فتكون جميع النسب الباقية متساوية ويحدث حينئذ هذا التناسب الآتي

اح : ط ه :: ا ب : ط ك :: ا ل : ط م :: ا ن : ط و :: ا ط : ط ه

فاذا طرح في هذا التناسب من حدى كل نسبة حدا النسبة السابقة لها حدثت عدة نسب جديدة متساوية بحيث يكون

اح : ط ه :: ب ح : ك ه :: ل ب : ك م :: ن ل : م و :: ن ط : و ه

وبذلك يثبت المطلوب

فاذا اعتبرنا الآن مماسين اخرين كمماسي ا ط ، ل م مثلاً حدث أيضاً

اح : ل ع :: ب ح : ع ر :: ب ل : ر ز :: ل ن : ز س :: ن ط : س م

وهلم جرّا

ويشاهد من ذلك انه اذا كان احد المماسات منقسماً الى اقسام متساوية كانت المماسات الباقية كذلك

س ١٢٩ اذ طريقة رسم قوس من قطع مكافي معلوم من بعد معرفة مماسين من مماساته

يؤخذ من النتيجة المتقدمة طريقة بسيطة لرسم قوس من القطع المكافي اذا علم مماسان من مماساته ونقطتا تماسهما به فلنفرض مثلاً ان ا ط ، ط ه شكل (٨٣) هما المماسان المعلومان وان نقطتي ا ، ه هما نقطتا تماسهما فيقسم كل واحد من هذين المستقيمين الى اقسام متساوية عددها كعدد تقاسيم المستقيم الثاني ثم توصل المستقيمات ب ك ، ل م ، ن و ، ه ر والخ فتكون بمقتضى ما تقدم مماسة للقطع المكافي المطلوب بحيث لو كان عدد هذه المماسات كثيراً جداً لكفت لرسم المنحني

لكن لاجل رسم هذا المنحنى بالضبط يلزم تعيين نقط التماس لهذه المماسات المختلفة - لانه يؤخذ من النتيجة المتقدمة ان هذه النقط تكون موجودة فى وسط المسافات الكائنة بين نقط تقاطع ثلاثة مماسات متتالية فنقطة ب مثلا توجد فى منتصف المسافة ء ت ونقطة ح توجد فى وسط المسافة ت ح وهكذا ويشاهد ايضا بغاية السهولة أن ت ب = ب ء ، ت ح = ل ت ، ح ء = ح ح وهكذا

شكل ٨٣

# الفصل الثالث

(فى مساحة القطع المكافى وفى المجسم المكافى وحجمه وفى طريقة توما اسمپسون)

٤١ — فى مساحة القطع المكافى — القطع المكافى هو احد المنحنيات التى يمكن تقدير مساحاتها بكل سهولة فلنعتبر مثلا القطعة المكافئة المحصورة بين المحور والراس وبين احداثى راسى حيثما اتفق مثل م ط شكل (٨٤) ويرسم داخل القوس المكافى خط منكسر حيثما اتفق مثل ا م، م، م ويتنزل الاحداثيات الراسية م ط ، م، ط، ، م، ط، واخيرا ترسم عدة مماسات من النقط م ، م، ......الخ فاذا قورن بعد ذلك المثلث هـ ب هـ، بشبه المنحرف ط م م، ط، وجد بالسهولة ان ارتفاع المثلث المذكور مساو لنصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف لانه اذا رسم من نقطة ب التى هى نقطة تقاطع المماسين مستقيم مواز

شكل ٨٤

الى المحور فانه يقسم الوتر م م١ الى قسمين متساويين بمقتضى بند (١٢٧)
وبناء على ذلك يكون العمود حـ ى المساوى لارتفاع المثلث مساويا أيضا
لنصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف لكن حيث ان مساحة مثلث

هـ ب هـ١ = هـ هـ١ × حـ ى / ٢ و

شبه منحرف ط م م١ ط١ = ط ط١ × حـ ى

فحينئذ تكون نسبة شبه منحرف ط م م١ ط١ : مثلث هـ ب هـ١ :: ٢ ط ط١ : هـ هـ١
لكن من المعلوم بمقتضى بند (١٣٢) أن

ا ط = ا هـ

ا ط١ = ا هـ١

ومنها يكون

ط ط١ = هـ هـ١

وبناء على ذلك يكون

شبه منحرف ط م م١ ط١ = ٢ × مثلث هـ ب هـ١

وبمثل ذلك يبرهن على ان شبه المنحرف المجاور له مساو لضعف المثلث المناظر
له وهلم جرا وحينئذ يكون مجموع الاشباه منحرف مساويا لضعف
مجموع المثلثات فاذا زودنا عدد أضلاع الخط المنكسر زيادة لانهائية
كان نهاية مجموع الاشباه منحرف عبارة عن سطح القطعة م ا ط ونهاية
مجموع المثلثات عبارة عن مساحة القطعة المثلثية هـ م ا
وحينئذ تكون مساحة القطعة الأولى ضعف مساحة القطعة
الثانية أعنى انها تكون مساوية لثلثى المثلث هـ م ط ا او المستطيل
ا ع م ط المكافئ لهذا المثلث
فاذا مددنا الاحداثى م ط على استقامته حتى يتلاقى مع المنحنى فى
نقطة مَ المماثلة لنقطة م تحصلت بالضرورة قطعة مكافية
ضعف الأولى تكون بالمثل مساوية لثلثى المستطيل ع م مَ عَ
وتنتج حينئذ النظرية الآتية

النظرية الحادية عشر — مساحة القطعة المكافية المحصورة
بين رأس المنحنى ووتر عمودى على المحور تساوى لثلثى مساحة المستطيل

الذى قاعدته هذا الوتر وارتفاعه بعد هذا الوتر عن الرأس

وأما اذا كان المطلوب تعيين مساحة القطعة المحصورة بين وترين عموديين على المحور كالقطعة م ع عَ مَ مثلا يلاحظ ان هذه القطعة هى الفرق بين القطعتين ع ا عَ ، م ا مَ اللتين يمكن تعيين مساحتيهما بمقتضى ما تقدم

س ١٤١ د مساحة القطاع المكافئ ا م المحصور بين نصفى القطرين البوريين ب ا ، ب م شكل (٨٥) المنطبق احدهما وهو ب ا على المحور ب ا ء تساوى ثلث مساحة شبه المنحرف م ب ء ط المحصور بين المحور ب ء والدليل ء ط والافقى م ط المار بنهاية نصف القطر البورى م ب وبين نصف القطر المذكور

وللبرهنة على ذلك يقال اذا اخذت نقطة مثل مَ قريبة جدا من نقطة م ووصل منها الى البورة ب بنصف القطر البورى مَ ب ثم انزل منها المستقيم مَ طَ عموديا على الدليل ء ءَ يحدث مثلث م مَ ب المنحنى الضلع م مَ والشكل الرباعى م مَ طَ ط المنحنى الضلع م مَ أيضا فاذا تصورنا ان نقطة مَ أخذت فى الاقتراب من نقطة م شيأ فشيأ حتى وصلت حدا لنهاية فى القرب منها فعند ذلك يؤل المثلث م مَ ب الذى كان منحنى الضلع م مَ الى مثلث آخر مستقيم الاضلاع الثلاثة وصغير جدا وكذا يؤل الشكل الرباعى م مَ طَ ط الى شكل متوازى الاضلاع ومستقيمها بحيث تكون مساحة مثلث م مَ ب عند النهاية مساوية لنصف مساحة متوازى الاضلاع المذكور لانهما يكونان متحدين فى القاعدة والارتفاع

وذلك

وذلك لكون قاعدة المثلث وهى م ب مساوية من خاصية القطع المكافى الى م ط الذى هو قاعدة متوازى الاضلاع وكذا لكون ارتفاعاهما مَ ه ، مَ ك متساويين لان خط م مَ يعتبر جزء من المماس للمنحنى فى نقطة م ولا يخفى ان المماس منصف للزاوية ط م ب وعليه يكون العمودان مَ ه ، مَ ك النازلان من نقطة مَ على ضلعى هذه الزاوية متساويين

ويعلم من ذلك ان مساحة مثلث م مَ ب تساوى نصف مساحة متوازى الاضلاع م مَ طَ ط بمعنى انه

مثلث م مَ ب = ½ م مَ طَ ط

ويمثل ذلك اذا اخذت نقطة مثل مً قريبة من مَ على المنحنى ورسم منها خطا مً ب ، مً طً حدث بمقتضى ما تقدم آنفا ان

مثلث مَ مً ب = ½ مَ مً طً طَ

وهكذا اذا اخذت عدة نقط اخرى على المنحنى قريبة من بعضها ووصل من كل منها الى البورة ثم انزل من كل منها عمود على الدليل انقسم القطاع المكافى الى جملة مثلثات كل مثلث منها مساو لنصف متوازى الاضلاع المناظر له

فاذا جمعت المثلثات على بعضها ومتوازيات الاضلاع على بعضها كان مجموع المثلثات الذى هو القطاع المكافى م ب ا مساويا لنصف مجموع متوازيات الاضلاع الذى هو الشكل م مَ مً ا ء ط اعنى ان قطاع

م ب ا = ½ شكل م ا ء ط

ومن ذلك يؤخذ ان

القطاع م ب ا = ½ الشكل الرباعى م ب ء ط

وهو المطلوب

س ٤٢ ـ اند مساحة القطعة المكافية حـ حَ ب ا ء حـ شكل (٨٦) المنحصرة بين قوس حيثما اتفق حـ حَ ب ا ء من القطع المكافى وبين الوتر حـ ء المار بطرفى ذلك القوس تساوى لثلثى متوازى

الاضلاع الذى احد ضلعيه هو الوتر حـ ء وضلعه الاخر حـ ب
الذى هو بعد هذا الوتر عن المماس
هـ ب و الموازى له محسوبًا
على اتجاه القطر ب ت الثانوى
مع الوتر حـ ء اعنى الذى يلزم ت
ان يمر بنقطة التماس ب
ويكون منصفًا للوتر حـ ء
بمعنى ان القطعة حـ حَ ب ا
ء حـ = $\frac{٢}{٣}$ متوازى الاضلاع
حـ هـ و ء

شكل ٨٦

ولاجل البرهنة على ذلك يبرهن اولاً على ان الجزء العلوى حـ حَ ب حـ
من القطعة المكافئة يساوى لثلثى متوازى الاضلاع حـ هـ ب حـ
ثم يبرهن بعد ذلك على ان الجزء السفلى حـ ب ا ء حـ = $\frac{٢}{٣}$ حـ ب و ء
فلنبتدئ بالجزء الاول ونقول
اذا اخذت نقطة مثل حَ على المنحنى لكنها قريبة جدًا من نقطة حـ بحيث
يعتبر الجزء الخطى حـ حَ كجزء من المماس حـ حَ ك للقطع المكافى فى
نقطة حَ الذى اذا مد حتى يتقاطع مع القطر ب ت فى نقطة ك كان
بالضرورة بعد ب ك = ب خَ
فاذا رسم المستقيم ك ط موازيًا الى ب هـ والمستقيم حـ ط موازيًا الى
القطر ب ت حدث متوازى الاضلاع حـ ط ك خَ وايضًا اذا رسم من
حَ مستقيم س حَ حَ موازيًا للمماس ومستقيم ع حَ ى موازيًا
للقطر لحدث متوازيا الاضلاع س ط ى حَ , حـ ع ح خَ وكانا متكافئين
وذلك لانه حيث كان مثلث حـ ح ك مساويًا لمثلث حـ ك ط من
خاصية متوازى الاضلاع الكلى بما ان حـ ك قطر له
وكذا من حيث ان مثلث حـ حَ ع = حـ حَ س ومثلث حَ ك خَ = حَ ك ى
فاذا جمعنا مثلثى حـ حَ ع , حَ ك خَ على بعضهما وطرح مجموعهما من

مثلث

مثلث ح ك ح كان الباقي هو متوازي الاضلاع ع حَ حَ ح
واذا جمع مثلثا ح حَ س ، حُ ك ى على بعضهما وطرح المجموع من مثلث
ح ك ط كان الباقي متوازي الاضلاع س ط ى حَ
وحينئذ فيكون متوازي الاضلاع المذكور مساويا الى متوازي الاضلاع
ع حَ حَ ح
لكن حيث ان بعد ب ك = ب حَ فيكون ك ى = ل حَ ويلزم
حينئذ أن يكون متوازي الاضلاع

هـ ل ى ط = هـ ل حَ س

أو يكون

هـ ل حَ س = ½ س ط ى حَ

وعليه فيكون متوازي الاضلاع

ع حَ حَ ح ٢ هـ ل حَ س

فاذا تصورنا ان نقطة حَ آخذة في الاقتراب من نقطة ح
شيئا فشيئا فلا يزال الارتباط المتقدم موجودا حتى اذا بلغت نقطة
حَ نهاية قربها من نقطة ح آل متوازي الاضلاع ع حَ حَ ح
في نهاية الامر الى الجزء ح حَ حَ ح من القطعة المكافئة التي نحن بصددها
واما متوازي الاضلاع هـ ل حَ س فانه يؤول الى القطعة الخارجة
ح هـ ل حَ وعليه فيكون

ح حَ حَ ح = ٢ ح حَ ل هـ

فاذا أخذت عدة نقط مثل حً ، حٌ ، ر ..... الخ على القوس
حَ ب واجري عليها العمل المتقدم انقسمت القطعة المكافئة ح حَ ب ح
الى جملة اجزاء كل واحد منها يساوي لضعف الجزء المناظر له من اجزاء القطعة
الخارجة ح حَ ب هـ بحيث لو جمعت الاجزاء الأولى على بعضها والثانية
على بعضها لثبت ان القطعة المكافئة

ح حَ ب ح = ٢ ح حَ ب هـ

وعليه فتكون مساحة القطعة ح حَ ب ح تساوي لثلثي متوازي
الاضلاع ح هـ ب ح ح وهو المطلوب الاول

وبمثل ذلك يبرهن على ان مساحة القطعة ح ب ا ء ح تساوي ثلثي مساحة متوازي الاضلاع ح ب و ء

وحينئذ اذا جمعت القطعتان المكافئتان على بعضهما كان مجموعهما وهو القطعة الكلية الاصلية ح ح ب ء ح مساويا في المساحة لثلثي مساحة متوازي الاضلاع الكلي ح ه ء و وهو المطلوب

(تنبيه) من حيث انه اذا انزل العمود ب ه على ضلع ح ء كان هو ارتفاع متوازي الاضلاع ح ه و ء فاذا رسم مستطيل قاعدته ح ء وارتفاعه ب ه لكان مكافئا لمتوازي الاضلاع ح ه و ء واذن فيمكن ان يقال

ان مساحة القطعة المكافية ح ب ء ح تساوي لثلثي مساحة المستطيل الذي قاعدته هو وترها ح ء وارتفاعه البعد الحقيقي لهذا الوتر عن نقطة التماس ب المقدر بالبعد ب ه

## في مجسم القطع المكافي

١٤٣ اذا أدير القطع المكافي حول محوره دورة كاملة فانه يرسم جسما تحركيا يسمى بالمجسم المكافي يمكن تعيين حجمه بالسهولة

ولذلك نرجع الى العمليات التي اجريت في ١٤٠ ونقارن حجم الجسم الحادث من دوران مثلث ه ب م شكل (٨٤) بحجم الجسم الحادث من دوران المستطيل الذي قاعدته هي ح ے وارتفاعه ط ط فنجد ان حجم الجسم الاول منهما مساوي الى

$$\frac{1}{3} \text{ ه ح}^2 \times \text{ه م}$$

وحجم الجسم الثاني مساوي الى

$$\text{ط} \times \text{ح}^2 \times \text{ط ه}$$

مع ملاحظة أن حرف ه المعلوم رمز النسبة التقريبية أما حرف ط العادي فهو المعلوم بالشكل وحينئذ فيكون حجم الاول ثلث حجم الجسم الثاني ثم يبرهن بمثل ذلك على أحجام الاجسام المماثلة لهذين الجسمين والمقابلة لجميع أضلاع الخط المنكسر فيكون بناء على ذلك مجموع الاسطوانات

مساويا

مساويا لثلاثة أمثال مجموع الاجسام الحادثة من دوران المثلثات لكن من المعلوم أن نهاية مجموع الاسطوانات عبارة عن قطعة المجسم المكافى ونهاية مجموع الاجسام الحادثة من دوران المثلثات عبارة عن الجسم الحادث من دوران الشكل هم ا وحينئذ فيكون مجموع الاول ثلاثة أمثال المجموع الثانى وتكون قطعة المجسم المكافى مساوية لثلاث أرباع المخروط م هم لكن من حيث أن حجم هذا المخروط هو

$$\frac{1}{3}\,\text{ه} \times \text{هط} \times \overline{\text{طم}}^{2} = \frac{2}{3}\,\text{ه} \times \text{اط} \times \overline{\text{طم}}^{2}$$

فحينئذ يكون حجم قطعة المجسم المكافى مساويا الى

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\,\text{ه} \times \text{اط} \times \overline{\text{طم}}^{2} = \frac{1}{2}\,\text{ه} \times \text{اط} \times \overline{\text{طم}}^{2}$$

وبناء عليه تحدث النظرية الآتية

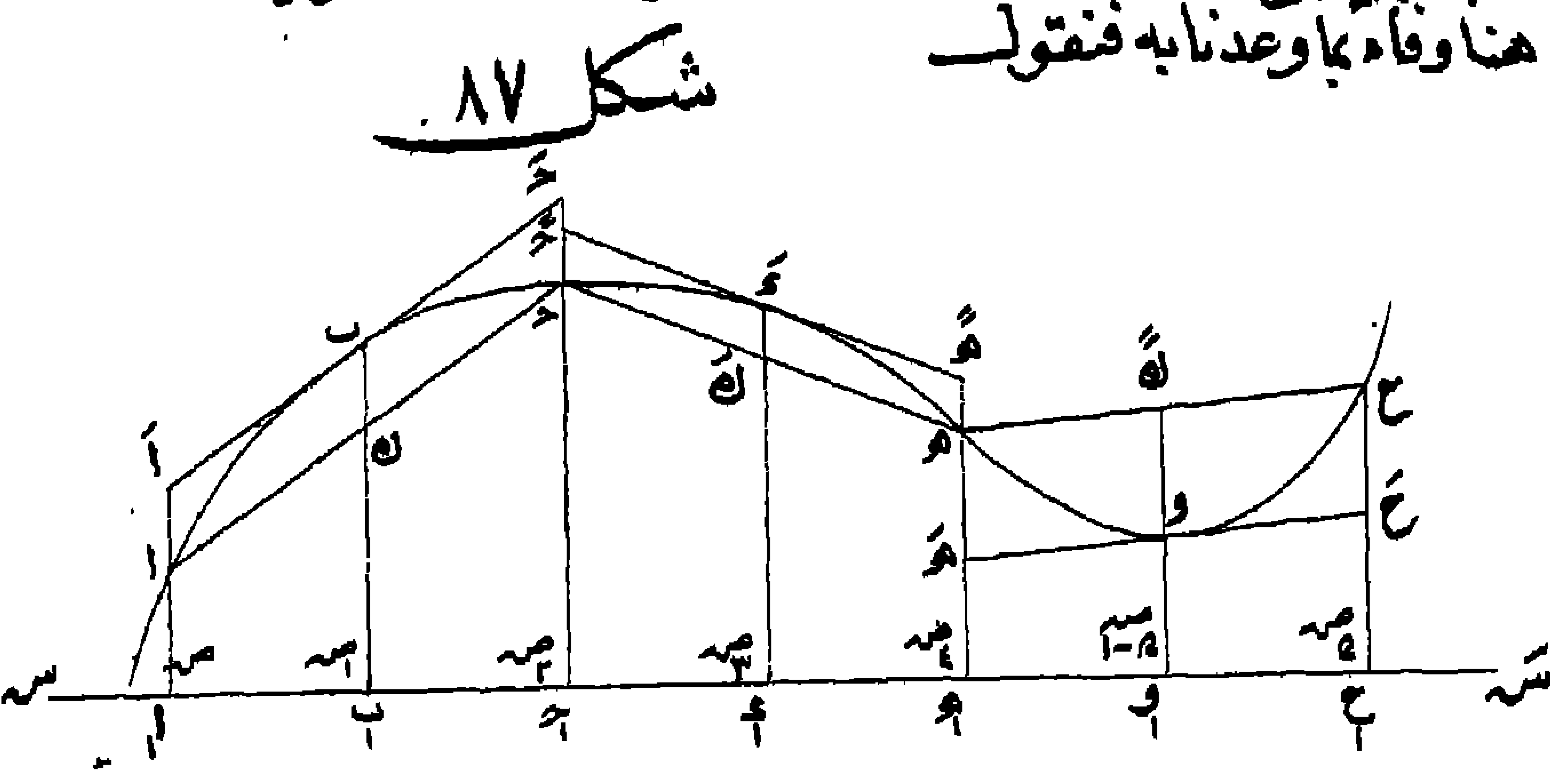
النظرية الثانية عشر — حجم قطعة المجسم المكافى المحصورة بين الرأس وبين مستو عمودى على المحور يساوى نصف حجم الاسطوانة التى قاعدتها وارتفاعها عين قاعدة وارتفاع هذه القطعة

ولاجل تعيين حجم قطعة من هذا المجسم محصورة بين مستويين عموديين على المحور يعتبر حجم هذه القطعة كالفرق بين قطعتين محسوبتين من الراس

## قانون توما سمپسون

١٤٤ قد أوعدنا فى آخر بند (٥٠) بأن سنذكر طريقة اخذ مساحة الاشكال المنحنية بواسطة قانون المسيو توما سمپسون بعد الكلام على القطع المكافى لانها مبنية على احدى خواصه وحيث قد آن الاوان لذكر هذه الطريقة فلنذكرها هنا وفاء بما وعدنا به فنقول

شكل ٨٧



إذا أريد ايجاد مساحة الشكل المحدد من الأعلى بالمنحنى ا ب حـ ء هـ و ح شكل (٨٧) ومن الاسفل بالمستقيم س سَ ومن الجانبين بالراسيين ا اَ، ح حَ العموديين على س سَ نبتدئ أولا بتقسيم البعد اَ حَ الى أقسام صغيرة جدا متساوية وزوجية العدد ولنرمز لنقط التقاسيم بالحروف اَ ، بَ ، حَ ، ءَ ، هَ ..... الخ ونقيم منها أعمدة على س سَ ونرمز لها بحروف ص ، ص ، ص ، ..... ص ، ص فينقسم الشكل الاصلى الى جملة اشكال نبحث عن مساحة كل اثنين منها معا وبعد ايجاد مساحاتها نجمعها على بعضها فيكون مجموعها هو المساحة المطلوبة

ولنبتدئ أولا بالبحث عن مساحة ا ب حـ حَ اَ المحدود من الاعلى بالقوس ا ب حـ ومن الجانبين بالاحداثيين ص ، ص ومن الاسفل بالمستقيم اَ حَ العمودى على الاحداثيين فنقول

اذا رمزنا أولا لكل قسم من أقسام القاعدة اَ حَ بحرف ع كانت القاعدة المذكورة مساوية الى ٢ع ثم يقال بما أن قوس ا ب حـ صغير جدا فيمكن اعتباره تقريبا كأنه قوس من القطع المكافئ المار بالثلاث نقط ا ، ب ، حـ الذى محوره موازٍ الى ا اَ ومن هذا الاعتبار يكون المستقيم ب بَ قطرا من أقطار ذلك القطع المكافئ بحيث لو وصلنا مستقيم ا حـ ورسمنا من نقطة ب مستقيما موازيا له كالمستقيم لَ كَ كان هذا المستقيم مماسا للقطع المكافئ لان المماس لأى منحنٍ يكون موازيا للاوتار التى اتجاهها مزدوج مع القطر المار بنقطة التماس

اذا تقرر هذا يقال اذا رمزنا للمساحة الشكل ا ب حـ حَ اَ بحرف م لوجدنا ان هذه المساحة مركبة من شبه المنحرف ا حـ حَ اَ الذى مساحته تساوى ٢ع × بَ كَ ومن القطعة المكافئة ا ب حـ التى مساحتها بمقتضى ... تساوى لثلثى مساحة متوازى الاضلاع ا حـ كَ لَ اعنى تساوى ٢ع × ⅔ كَ ب واذن فيكون مقدار المساحة م هو الآتى

م = ٢ع (بَ كَ + ⅔ كَ ب)

وحيث

وحيث ان $\text{ب}_1\text{ك} = \frac{\text{ص}+\text{ص}_2}{2}$ و $\text{ك ب} = \text{ب}_1\text{ب} - \text{ب}_1\text{ك}$ أعني ان $\text{ك ب} = \text{ص}_1 - \frac{\text{ص}+\text{ص}_2}{2}$ فيكون

$$\text{ف} = 2\text{غ}\left[\frac{\text{ص}+\text{ص}_2}{2} + \frac{2}{3}\left(\text{ص}_1 - \frac{\text{ص}+\text{ص}_2}{2}\right)\right] = \frac{\text{غ}}{3}\left(\text{ص}+4\text{ص}_1+\text{ص}_2\right)$$

وبهذه الكيفية نبحث عن مساحة الشكل الجزئي الثاني وهو ح د ه ح₁ بحيث لو رمزنا لمساحته بحرف ف' لوجدنا أن

$$\text{ف}' = 2\text{غ}\left[\frac{\text{ص}_2+\text{ص}_4}{2} + \frac{2}{3}\left(\text{ص}_3 - \frac{\text{ص}_2+\text{ص}_4}{2}\right)\right] = \frac{\text{غ}}{3}\left(\text{ص}_2+4\text{ص}_3+\text{ص}_4\right)$$

وهكذا يبحث عن مساحة بقية الاشكال الجزئية ف''، ف'''، ... الخ حتى لو وجدنا أن احد هذه الاشكال الجزئية محدود من الاعلى بمنحن تحدبه موجه نحو القاعدة س س' بضد المنحنيات الجزئية الاخرى كالشكل الثالث الجزئي وهو ه و ح ج ه فلا تزال مساحته تتحدد بقانون مشابه لمقدار ف ، ف' ، ...... الخ لاننا اذا رمزنا بحرف $\text{ف}_\text{ن}$ لهذا الشكل وجدنا بمقتضى ما تقدم أن

$$\text{ف}_\text{ن} = 2\text{غ}\left(\text{و}_1\text{ك}'' - \frac{2}{3}\,\text{و ك}''\right)$$

فاذا لاحظنا أن $\text{و}_1\text{ك}'' = \frac{\text{ص}_4+\text{ص}_\text{ن}}{2}$ وأن $\text{و ك}'' = \text{و}_1\text{ك}'' - \text{و}_1\text{و}$ أعني أن $\text{و ك}'' = \frac{\text{ص}_4+\text{ص}_\text{ن}}{2} - \text{ص}_{\text{ن}-1}$ فيحدث

$$\text{ف}_\text{ن} = 2\text{غ}\left[\frac{\text{ص}_4+\text{ص}_\text{ن}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\text{ص}_4+\text{ص}_\text{ن}}{2} - \text{ص}_{\text{ن}-1}\right)\right] = \frac{\text{غ}}{3}\left(\text{ص}_4+4\text{ص}_{\text{ن}-1}+\text{ص}_\text{ن}\right)$$

فاذا بحثنا بهذه الكيفية عن مساحات جميع الاشكال الجزئية لغاية الشكل الأخير وجمعنا جميع هذه المساحات على بعضها تحصّلت لنا مساحة الشكل الكلي بحيث لو رمزنا لها بحرف ط ولطول القاعدة الكلية بحرف س ولاحظنا ان $\frac{\text{غ}}{3} = \frac{\text{س}}{3\text{ن}}$ لكان

$$\text{ط} = \frac{\text{س}}{3\text{ن}}\left[\text{ص}+\text{ص}_\text{ن}+4\left(\text{ص}_1+\text{ص}_3+\text{ص}_5+\cdots+\text{ص}_{\text{ن}-1}\right)+2\left(\text{ص}_2+\text{ص}_4+\cdots+\text{ص}_{\text{ن}-2}\right)\right]$$

وترجمة هذا القانون هي أن مساحة الشكل الكلي الذي يراد أخذ مساحته تساوي لحاصل ضرب ثلث المسافة الكائنة ما بين كل احداثيين متتاليين في حاصل جمع الاحداثيين المتطرفين الذي هو $(\text{ص}+\text{ص}_\text{ن})$ زائداً اربعة أمثال مجموع الاحداثيات الفردية الرتبة الذي هو $(\text{ص}_1+\text{ص}_3+\text{ص}_5+\cdots+\text{ص}_{\text{ن}-1})$ زائداً ضعف مجموع الاحداثيات المتوسطة

الزوجية الرتبة الذى هو $(ص_٢ + ص_٤ + ص_٦ + \cdots\cdots + ص_{ن-١})$

فاذا فرضنا مثلاً ان $ن = ٨$ حدث

$$ط = \frac{ب}{٤ \times ٨}\left[ص + ص_ن + ٤(ص_١ + ص_٣ + ص_٥ + ص_٧) + ٢(ص_٢ + ص_٤ + ص_٦)\right]$$

(تنبيـــه) اذا كانت احدى نهايتى المنحنى او كلتاهما موجودتين على القاعدة س سَ لزم لتعيين المساحة ان يفرض فى القانون العمومى أن كلاً من الاحداثيين ص ، $ص_ن$ المناظرين للنقطتين من المنحنى الموجودتين على القاعدة مساوياً لصفر فتحدث المساحة المطلوبة أمّا اذا كان الشكل الذى يراد أخذ مساحته شكلاً محدوداً من جميع اطرافه بمنحنٍ مقفول لزم ان تؤخذ داخله قاعدة مستعارة تقسمه الى قسمين ثم نبحث عن مساحة كل قسم منهما على حدته بواسطة القانون العمومى ونجمع المساحتان على بعضهما

أو تعيين مساحة الشكل الكلى دفعة واحدة بواسطة القانون العمومى ويكفى فى ذلك ان تؤخذ الاحداثيات مساوية لمجموع كل احداثيين متناظرين من احداثيات جزئى المنحنى العمومى

# الباب الخامس

## فى تتمة الثلاثة ابواب المتقدمة وفيه فصلان

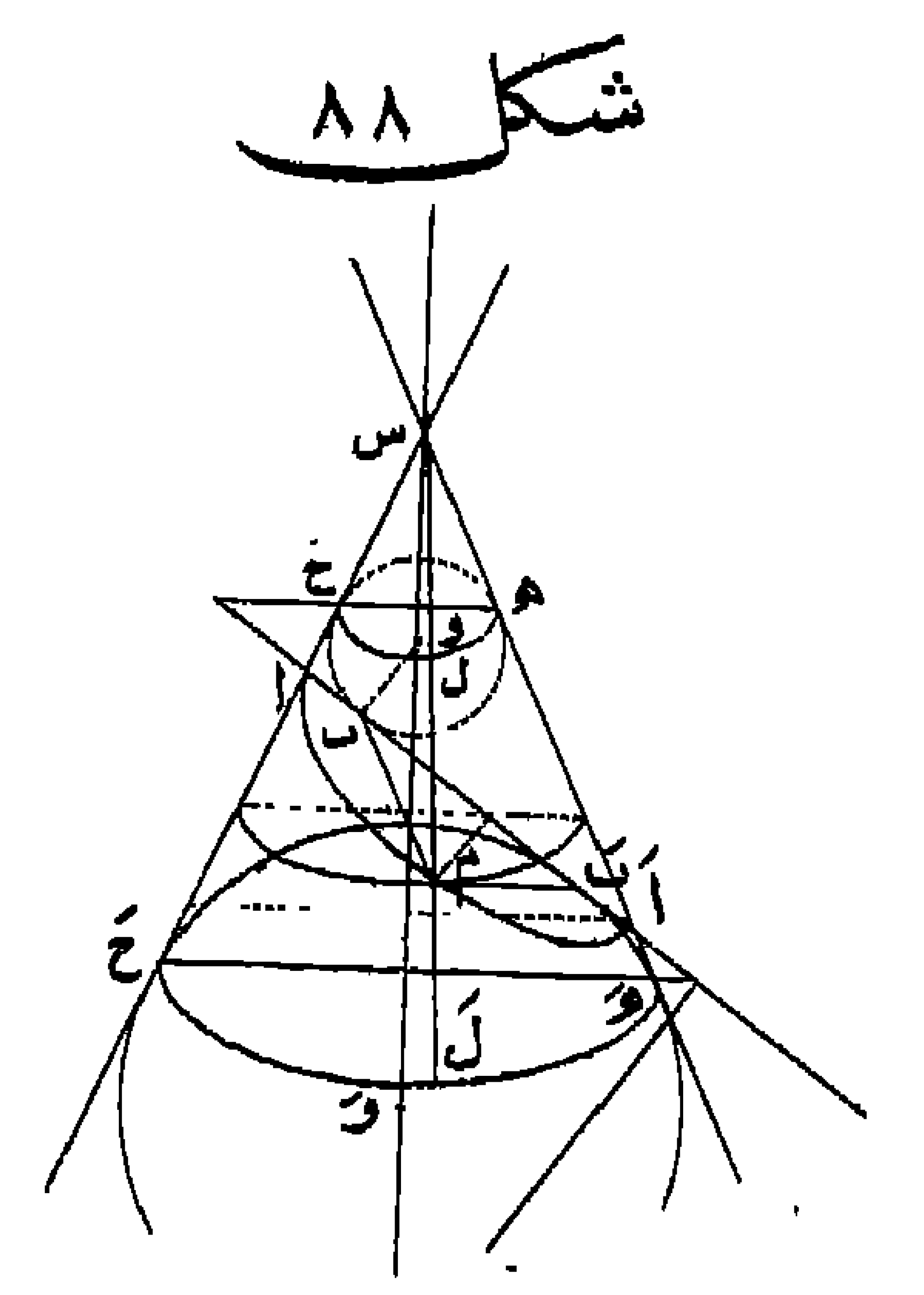
# الفصل الاول

## فى القطاعات المخروطية

بند ١٤٥ اذا نظرنا الى المنحنيات الثلاثة المتقدمة وهى القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافى وتأملنا جيداً فى خواص كل منها على حدته فلا بد ان تظهر لنا مشابهة كبيرة فى اغلب الخواص بحيث يظهر لكل من أمعن نظره فى تلك الخواص ان المنحنيات الثلاثة المذكورة اخوة لكثرة مشابهتها ببعضها وقلة الفرق الواقع بين خواصها

وفي الواقع لان كلاً من هذه الثلاثة منحنيات ناشئ عن قطع المخروط القائم الذى قاعدته دائرة بمستو واختلافها ناتج فقط من اختلاف وضع ذلك المستوى القاطع الذى هو بمنزلة ابوها بالنسبة لوضع المخروط المقطوع الذى هو بمنزلة أمها فهى على ذلك اخوة ابوها المستوى وأمها المخروط ولذا سميت بالقطاعات المخروطية ولنبين لك حقيقة ذلك فنقول .

س ١٤٦ ـ نظرية ـ اذا قطع المخروط القائم الذى قاعدته دائرة بمستو كان خط تقاطعهما اما قطعا ناقصا واما قطعا زائدا واما قطعا مكافيا وذلك بحسب وضع المستوى القاطع بالنسبة لوضع المخروط فاذا كان المستوى قاطعا لجميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من رأسه كان خط التقاطع قطعا ناقصا وان كان قاطعا لجميعها أيضا لكنه قاطع لبعضها فى احدى الطيتين والبعض الاخر فى الطية الثانية أعنى فى جهتين متضادتين من رأس المخروط كان خط التقاطع قطعا زائدا وأما ان كان المستوى القاطع موازيا لاحد رواسم المخروط وقاطعا لباقى الرواسم كان خط التقاطع قطعا مكافيا ومن هنا يعلم ان لهذه النظرية البديهة ثلاث حالات




س ١٤٧ ـ الحالة الاولى ـ لنفرض أن المستوى القاطع قاطع لجميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من رأسه مثلا ليكن س وَ شكل (٨٨) هو محور المخروط ونفرض ان س ا و س اَ هما خطا تقاطعه بمستوى الشكل وان اَ اَ هو خط تقاطع المستوى القاطع بمستوى الشكل

ا الذى فرضناه عمودياً على ذلك المستوى القاطع
ثم نرسم الدائرتين هـ ب ح ، هَ بَ حَ المماستين لأضلاع المثلث
ا س اَ اولامتدادتهما من الداخل والخارج ونتصور دوران
جميع اجزاء الشكل [ ما على خط ا اَ ] دورة كاملة حول المحور
س وَ فمستقيم س ا يولد سطح المخروط المعلوم ودائرتا
هـ ب ح ، هَ بَ حَ ترسمان كرتين مماستين لهذا المخروط فى دائرتين
صغيرتين مثل هـ ح ، هَ حَ ومماستين ايضاً للمستوى القاطع
ا اَ فى نقطتين مثل ب ، بَ
اذا تقرر هذا يقال اذا فرضنا ان خط تقاطع المستوى ا اَ بالمخروط
هو منحنى كالمنحنى ا م اَ واخذت عليه نقطة اختيارية مثل م
ثم وصل منها الى رأس المخروط س بمستقيم م س ومنها الى النقطتين
ب ، بَ بمستقيمى م ب ، م بَ لكان المستقيمان م ل ، م ب متساويين بما انهما مماسان لكرة واحدة وهى الكرة و
وخارجان من نقطة واحدة وهى م وبمثل ذلك يكون المستقيمان
م لَ ، م بَ المماسان للكرة وَ متساويين ايضاً وحينئذ
يكون

$$\text{م ب} + \text{م بَ} = \text{م ل} + \text{م لَ}$$

لكن بما أن

$$\text{م ل} + \text{م لَ} = \text{ل لَ} \quad \text{فيكون}$$

$$\text{م ب} + \text{م بَ} = \text{ل لَ}$$

وحيث أن ل لَ راسم من رواسم المخروط الناقص المحدود بمستويى
ح ل هـ ، حَ لَ هَ العموديين على المحور فيكون طوله ثابتاً مهما
تغير وضعه بتغير وضع النقطة م وبناءً على ذلك يكون المنحنى ا م اَ
الذى هو خط تقاطع المخروط بالمستوى ا اَ قطعاً ناقصاً بؤرتاه
هما ب ، بَ لأن مجموع البعدين الواصلين من أى نقطة منه
كنقطة م مثلاً الى البؤرتين ب ، بَ مساو لكمية ثابتة

١٤٨ – الحالة الثانية – وهي الحالة التي يكون فيها المستوى القاطع قاطعا لجميع رواسم المخروط لكنه ملاق بعضها في احدى جهتي رأس المخروط والبعض الآخر في جهتها الأخرى

فلنفرض مثلا ان اس ح ، أَس هـ شكل (٨٩) هما راسما تقاطع المخروط المعلوم بمستوى الشكل وان خط أأَ هو خط تقاطع المستوى القاطع مع مستوى الشكل المفروض أنه عمودي عليه

ثم نرسم الدائرتين هـ ح ب ، حَ هَ بَ المماستين لاضلاع المثلث س أأَ من الخارج ونتوهم كما في ١٤٧ دوران الجملة حول محور المخروط الذي هو وس وَ دورة كاملة فالدائرتان المتقدمتان ترسمان كرتين مماستين للمخروط في جميع نقط الدائرتين الصغيرتين

شكل ٨٩

ح ل هـ ، حَ لَ هَ والمستوى القاطع في نقطتين مثل ب ، بَ فاذا فرض حينئذ ان نقطة م نقطة من منحنى التقاطع كان المستقيمان م ب ، م ل متساويين لكونهما مماسين للكرة و من نقطة م الخارجة عنها وكذلك يكون مستقيما م بَ ، م لَ المماسان للكرة وَ متساويين فيحدث

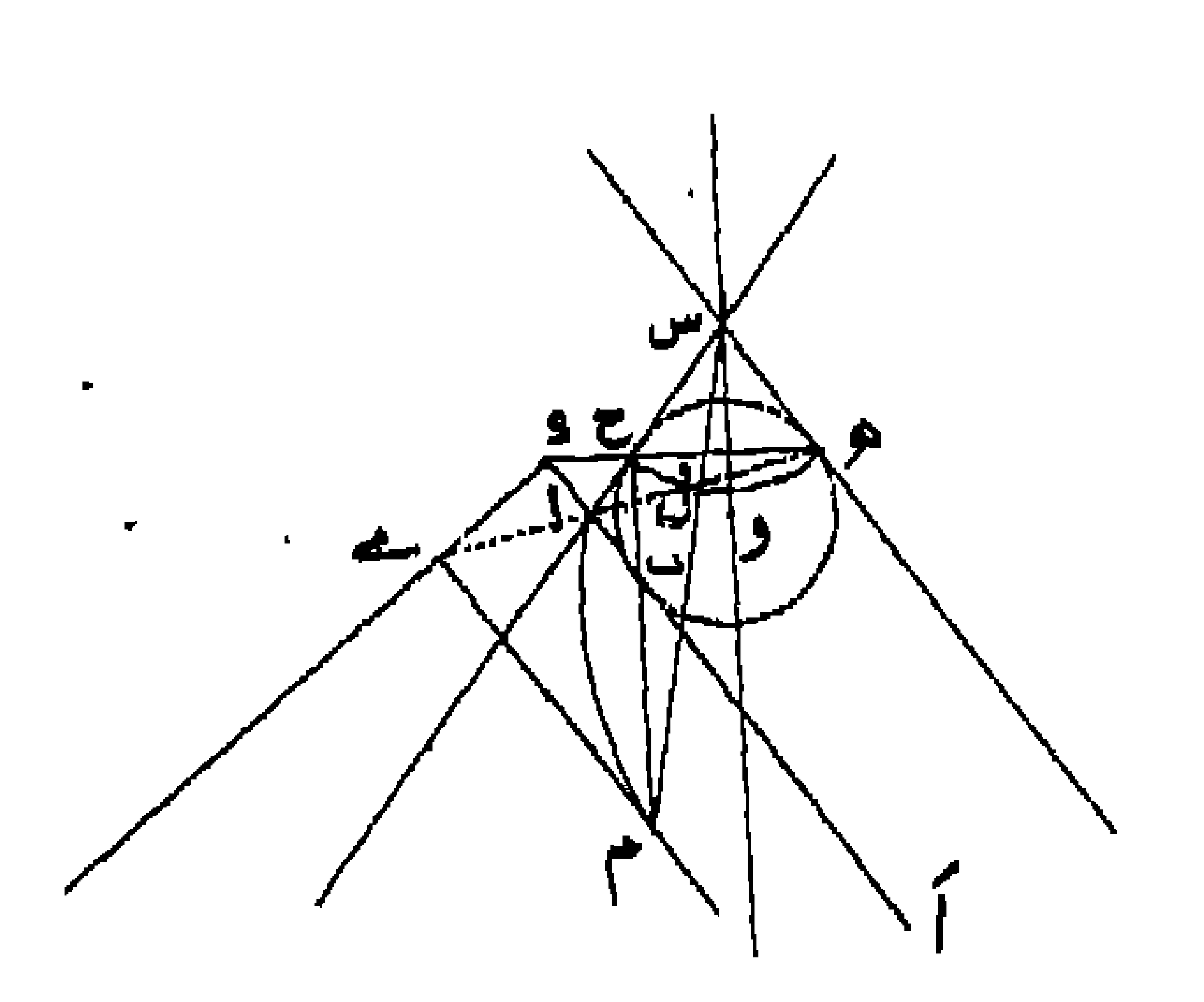
$$\text{م بَ} - \text{م ب} = \text{م لَ} - \text{م ل} = \text{ل لَ}$$

لكن من حيث ان المستقيم ل لَ ثابت الطول مهما تغير وضعه لكونه جزءا من راسم المخروط محصورا بين مستويين عموديين على المحور فيكون المنحنى قطعا زائدا بورتاه هما ب ، بَ وهو المطلوب

١٤٩ – الحالة الثالثة وهي التي يكون فيها المستوى القاطع موازيا

لاحد رواسم المخروط
فلنفرض مثلاً أن ح س هـ
شكل (٩٠) هو خط تقاطع
المخروط بمستوى الشكل وأن
ا آ هو خط تقاطع مستوى
الشكل بالمستوى القاطع
العمودي عليه
ثم نرسم دائرة مماسة للثلاثة
مستقيمات س ح ، س هـ
، ا آ ونتوهم دوران الجملة

شكل ٩٠



كما تقدم فالدائرة ترسم كرة مماسة للمستوى القاطع في نقطة ب
وللمخروط في نقط الدائرة ح ل هـ ثم نفرض ان المستقيم ء ے
كناية عن خط تقاطع مستوى ح ل هـ بالمستوى القاطع ويلزم
أن يكون هذا الخط عموديا على مستوى الشكل وعلى المستقيم
ا آ بالجملة لانه خط تقاطع مستويين عموديين على مستوى الشكل
في آن واحد
اذا تقرر هذا وفرضنا ان نقطة م نقطة من منحنى التقاطع الذى
يراد معرفة جنسه المجهول ثم وصل المستقيمان م ب ، م س
وانزل م ے عموديا على خط ء ے كان بمقتضى ما تقدم

م ب = م ل

ولنلاحظ الآن ان الثلاث نقط هـ ، ل ، ے موجودة في
المستوى هـ ل ح لان المستقيم ء ے موجود في نفس هذا
المستوى وغير ذلك فانها توجد ايضا داخل مستوى المستقيمين
س هـ ، س م لان المستقيم م ے موازٍ الى ا آ فيكون
حينئذ موازيا الى س هـ وتكون حينئذ الثلاثة مستقيمات
س هـ ، س م ، م ے موجودة في مستوٍ واحد

وينتج

وينتج من ذلك ان الثلاث نقط ﻫ ، ل ، ى موجودة على استقامة واحدة واذن يكون مثلثا س ﻫ ل ، م ى ل متشابهين ومن تشابههما يعلم انه حيث كان المستقيم س ﻫ مساويا الى س ل فيكون م ى مساويا الى م ل وعليه يكون

م ب = م ى

ومن هذه المتساوية قد اتضح ان منحنى التقاطع قطعا مكافيا بورته نقطة ب ودليله المستقيم ء ى وهو المطلوب

س ١٥١د قد ظهر حينئذ من النظرية المتقدمة بأحوالها ان الثلاثة منحنيات المتقدمة أعني القطع الناقص والقطع الزايد والقطع المكافي ناشئة كلها من تقاطع المستوى بالمخروط القائم ذى القاعدة المستديرة ولذلك نراها متشابهة في أغلب الخواص وانما الفرق الكائن بينها ناشئ فقط من اختلاف وضع المستوى القاطع بالنسبة للمخروط المقطوع ولهذه الاسباب اشتهرت هذه المنحنيات باسم القطاعات المخروطيه

س ١٥١د القطع الناقص ينشا ايضًا من تقاطع المستوى باسطوانة قائمة مستديرة القاعدة وذلك في حالة ما يكون المستوى القاطع المذكور مائلا على محورها

نعم انه يمكن البرهنة على صحة هذه النظرية باعتبارها كنتيجة أو كحالة خصوصية من المسالة المتقدمة في س ١٤٧د

إذ أن الاسطوانة يمكن اعتبارها كمخروط رأسه بعدت عن القاعدة حتى صارت على بعد منها لانهاية له ولكن لزيادة الايضاح نبرهنها ببرهان مخصوص بها فنقول

لنفرض مثلا ان المستقيمين ع ط ، س ح شكل (٩١) هما راسما تقاطع الاسطوانة المعلومة بمستوى الشكل وان المستقيم ا أ خط تقاطع مستويى الشكل بالمستوى القاطع للاسطوانة المذكورة وهذا المستوى معتبر عموديًا

على مستوى الشكل ثم نرسم الدائرتين حـ ب ء ، حَ بَ ءَ المماستين للراسمين ع ط ، س ه وللمستقيم اا َ ونتوهم دوران الجملة أعني الدائرتين والراسمين حول محور الاسطوانة وهو و وَ دورة كاملة فيتولد من هذا الدوران الاسطوانة ع ط ه س والكرتان و ، وَ التي احداهما وهي العليا مماسة للاسطوانة في الدائرة حـ ك ء وللمستوى اا َ في نقطة ب والاخرى وهي السفلى مماسة للاسطوانة في الدائرة حَ كَ ءَ وللمستوى اا َ في نقطة بَ

اذا تقرر هذا وفرضنا ان منحنى تقاطع المستوى اا َ بالاسطوانة ع ط ه س هو المنحنى ا م ا َ واخذت عليه نقطة اختيارية ولتكن م مثلا ثم وصل منها الى نقطتي ب ، بَ بمستقيمي م ب ، م بَ ثم رسمنا الراسم ك م كَ المار بها وجدنا بمقتضى ما تقدم ان

$$م ب = م ك$$

وذلك لكونهما مماسين للكرة و من نقطة م الخارجة عنها وكذلك نجد بنفس هذا السبب ان

$$م بَ = م كَ$$

وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما طرفا بطرف يحدث

$$م ب + م بَ = م ك + م كَ = ك كَ$$

لكن

لكن حيث ان البعد ك كَ ثابت الطول بما انه هو جزء الراسم المحصور بين مستويى الدائرتين ح ك ء , حَ كَ ءَ المتوازيتين لكونهما عموديتين على المحور فيثبت المطلوب حينئذ من ان المنحنى ام آ قطع ناقص حيث ثبت ان مجموع البعدين م ب , م بَ الواصلين من اى نقطة منه كنقطة م المأخوذة بالاختيار الى نقطتى ب , بَ الثابتتين مساو لكمية ثابتة

# الفصل الثانى

## فى بعض مسائل تطبيقية على الثلاثة منحنيات المتقدمة

## س ٥٤ اذكر مسائل تختص برسم القطع الناقص

### المسألة الاولى

ما مقدار طول الحبل او الخيط اللازم لرسم قطع ناقص على الارض بفرض ان المحور الاصغر لهذا القطع الناقص يساوى ١٠ متر والبعد بين بورتيه يساوى ١٥ متر ومفروض انه ستربط نهايتا الخيط فى مسمارين مغروسين فى البورتين وان قيمة ما يلف على المسمارين من الخيط لاجل ربطه بهما غير محسوب فى طول الحبل المطلوب

شكل ٩٢

لاجل حل هذه المسألة يقال من مثلث ب و ء شكل (٩٢) القائم الزاوية فى و يعلم بمقتضى س ٤٦ ان

بَءَ = بَوَ + وَءَ

ومن هذا القانون المشتمل على الارتباط الواقع بين نصف المحور الأكبر للقطع الناقص ونصف محوره الأصغر ونصف البعد الكائن بين البورتين يعلم أن

$$ب ء = \sqrt{ب و^٢ + و ء^٢}$$

فاذا وضعنا بدل كل حد مقداره ورمزنا بحرف س لنصف المحور الأكبر المجهول يكون

$$س = \sqrt{٥٫٧^٢ + ٥^٢}$$

أو $س = \sqrt{٥٫٢٥ + ٥٫٥٦ + ٥} = \sqrt{٨١٫٢٥} = ٩٫٠١٢$ مترا تقريبا

وعلى ذلك يكون ٢س أعني المحور الأكبر مساويا الى ٢٦٫٠٨١٠ مترا وهو طول الجزء الخالص من الخيط المطلوب

## المسألة الثانية

أخذ حبل وعقد طرفاه ببعضهما وكان طول محيطه بعد العقد مساويا الى ٢٦٫٠٢٤ مترا ورسم به قطع ناقص بطريقة الاستمرار المقررة في ٤٠٦ لكن مع جعل الخيط لافا على المسمارين المغروسين في البورتين لا مربوطا من طرفيه بهما كما في المسألة الأولى فوجد أن المحور الأصغر للقطع الناقص الحادث مساويا الى ١٠ متر فكم كان البعد بين المسمارين

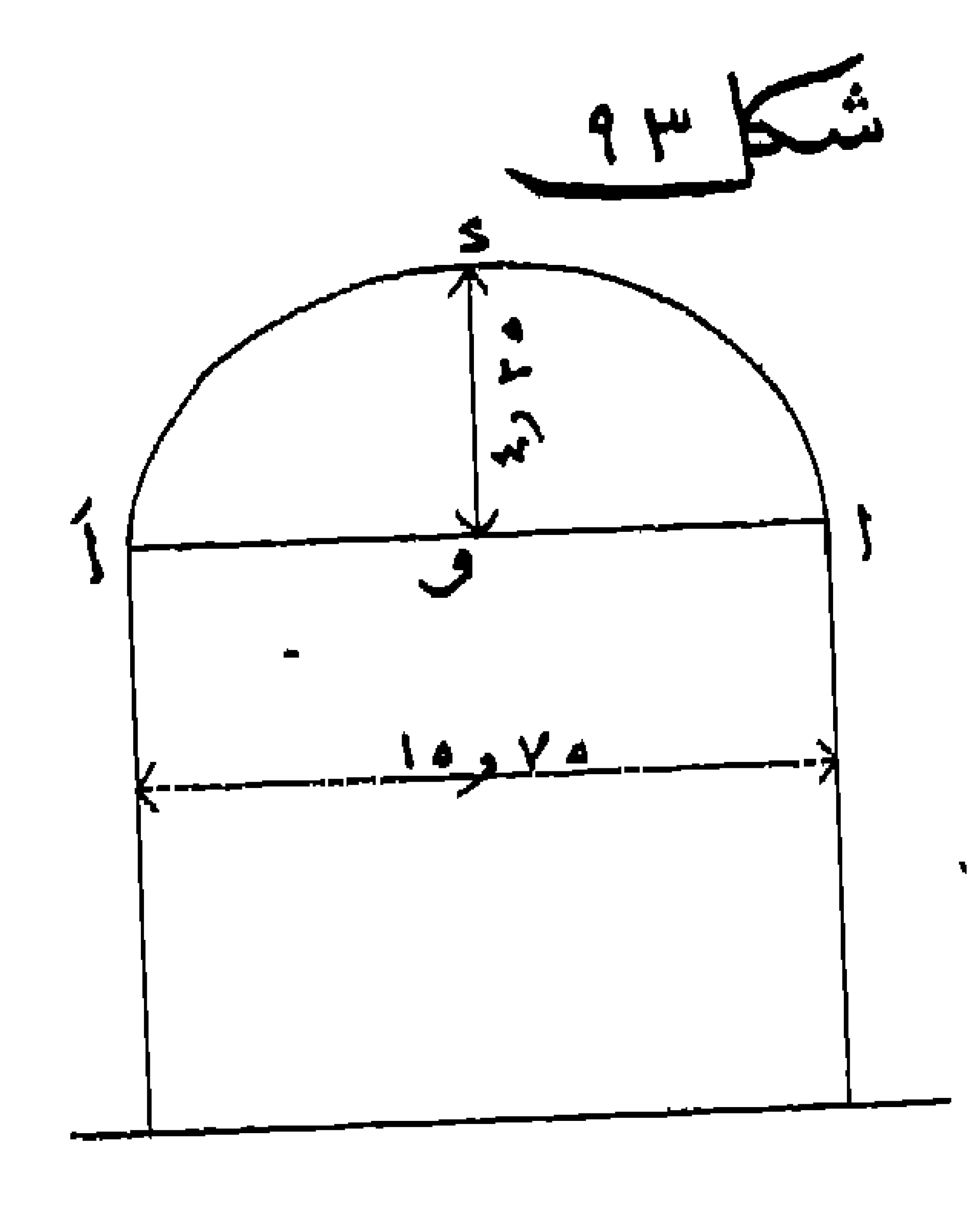
الجواب — كان المسماران مغروسين على بعد ٥ متر من بعضهما

## المسألة الثالثة

نحات يشتغل بنحت أحجار عقد ناقص لقنطرة فتحة عينها أعني البعد $اا' = ٧٥٫٥$ متر شكل (٩٤) وارتفاع تنفيسها أعني مقدار ارتفاع مفتاحها عن مستوى المبدأ وهو البعد ء و = ٢٥٫٤ متر

فيلزمه

شكل ٩٣




فيلزمه بالضرورة ان يرسم هذا القطع الناقص على حائط مستو بواسطة المسطرة كما فى س ٤٧ د ليرسم عليه تفاصيل العقد المطلوب فكيف يصنع النحات بالمسطرة لرسم القطع الناقص المذكور

الجواب : يعلّم على حرف المسطرة ثلاث نقط بحيث يكون بعد النقطتين المتطرفتين عن بعضهما يساوى ٧٫٨٧٥ متر وبعد النقطة المتوسطة عن احدى هاتين النقطتين يساوى ٣٫٦٢٥ متر ويجرى العمل كما فى س ٤٧ د

## المسألة الرابعة

كيف يصنع هذا النحات بعينه فى المسطرة اذا اراد ان يرسم القطع الناقص المتقدم بالطريقة المبينة فى س ٤٩ د

الجواب — يعلّم على المسطرة ثلاث نقط بحيث يكون بعد المتطرفتين عن بعضهما يساوى ٢٫١٢٥ متر وبعد النقطة المتوسطة عن احدهما يساوى ٤٫٢٥ متر ويتم العمل طبقا لس ٤٩ د

## المسألة الخامسة

شكل ٩٤

غرس فى نقطتى ب , ت شكل (٩٤) من الارض مسماران متباعدا عن بعضهما بقدر ٨٫٥ متر وأخذت مسطرة طولها ٨٫٤٠ متر وخيط طوله كطول المسطرة ثم وضعت المسطرة فى وضع كالوضع ت ح بأن كان طرفها ت مماسا للمسمار المغروس

في هذه النقطة أما الخيط فقد ثبت أحد طرفيه في المسمار ب وطرفه الآخر في النهاية الأخرى من المسطرة وهي ت ثم شد الحبل بواسطة قلم الرسم بجانب المسطرة حتى أخذ الوضع ب م ت وبعد ذلك حركت المسطرة مع بقاء الخيط على الدوام مشدودا بقلم الرسم فما يكون جنس المنحني الذي يرسمه القلم في أثناء الحركة وما مقدار أبعاده

الجواب — المنحني المرسوم قطع ناقص محوره الأكبر ٤٠ ر ٨ متر ومحوره الأصغر تقريبا ٧٦ ر ٠ و ٦ متر (انظر بند ٥٥ ر ٥٦)

سند ١٥٤ مسائل تتعلق بمساحة القطع الناقص

## المسألة السادسة

مدرسة التجهيزية استعارت من جنينة مدرسة المبتديان خضارا لمؤنة تلامذتها لحين طلوع الخضار المزروع في جنينة التجهيزية فتعوضه لها بكمية من نفس الخضار ومساوية لما استعارته منها فأخذت التجهيزية جميع ما كان مزروعا في حوض من الأرض شكله ناقصي طول محوره الأكبر ٥٠ متر وطول محوره الأصغر ١٤ متر ولما طلع الخضار بجنينة التجهيزية حضر الباشغتونجي من المبتديان ليسترد ما أخذ من جنينته فانتخب له باشغتونجي التجهيزية حوضا ناقصيا أيضا لكن طول محوره الأكبر ٤٧ متر وطول محوره الأصغر ١٢ وقال له ان مساحة هذا الحوض مثل مساحة الحوض الذي أخذناه منكم لأنه أطول من حوضكم بمترين وأقل منه في العرض بمترين فهو حينئذ قدره فخذ ما فيه من الخضار فقبل ذلك منه مسلما وأخذ ما في الحوض المذكور فأي الباشغتونجيين أمكر من أخيه

الجواب — باشغتونجي التجهيزية كان أمكر لأنه أعطى للثاني حوض خضار تنقص مساحته عن مساحة الحوض الذي أخذ من المبتديان بقدر ٤٠ ر ٢٠ مترا مسطحا

المسألة

## المسألة السابعة

حوض ناقص من الارض مساحته نصف فدان وطول محوره الاصغر اربعون مترا فما يكون طول محوره الاكبر وما البعد بين البورتين وما مقدار طول الحبل الذى استعمله الجنايني لرسمه بواسطة الطريقة المقررة فى سـ ٢٩ كـ (طريقة ثانية)

الجواب — المحور الاكبر يساوى ٨٦ ر ٦٦ مترا والبعد بين البورتين يساوى ٥٦ ر ٥٤ مترا وطول الحبل الذى لزم لرسمه يساوى ٤٢ ر ١٢٠ مترا

## المسألة الثامنة

المعلوم قنطرة ذات عين واحدة شكل (٩٥) عرضها يساوى ٠٠ ر ٢٠ متر وارتفاع كتفها ٠٠ ر ٨ متر لحد مستوى مبدء عقدها المفروض انه نصف قطع ناقص محوره الراسى ٠٠ ر ١٢ متر أعنى ان ارتفاع المفتاح عن مستوى المبدء يساوى ٠٠ ر ٦ متر تمر منها مياه الترعة الموضوعة عليها هذه القنطرة فاذا فرضنا ان المياه فاضت الى ان ارتفع سطحها عن مستوى مبدء العقد بقدر ٠٠ ر ٤ متر فما يكون مقدار سطح القطاع المغمور بالماء من عين القنطرة

شكل ٩٥

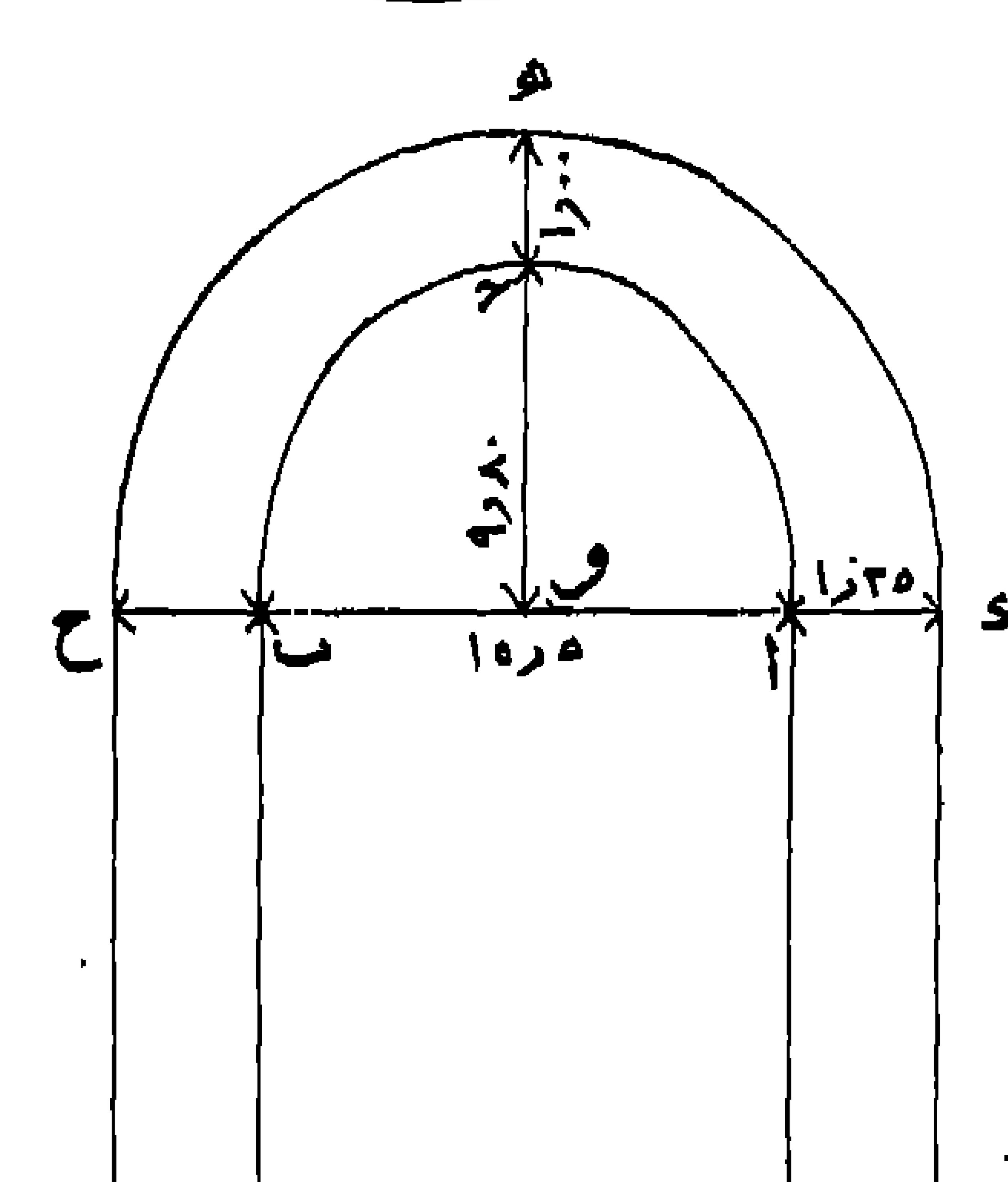
الجواب — القطاع المغمور بالماء يساوى ١٦٥ ر ١٩٥ مترا مسطحا والحل يؤخذ من سـ ٧٢ كـ

## سـ١٥٤ـد مسائل تتعلق بحجم المجسم الناقص

## المسألة التاسعة

المعلوم قبة ناقصية شكل (٩٦) كالقبة التي سطح تنفيخها (١) أي سطحها الداخل كناية عن سطح مجسم القطع الناقص الحركي الناشئ من دوران نصف القطع الناقص اجب حول المحور الراسي وج الذي هو عبارة عن المحور الأكبر لهذا القطع الناقص وسطح تجريد القبة أي سطحها الخارج عبارة عن سطح مجسم القطع الناقص الناشئ من دوران دهح حول نفس المحور هـ و الراسي

شكل ٩٦




والمطلوب معرفة حجم البنا الموجود في هذه القبة من بعد معرفة ان المحور الاصغر اب للقطع الناقص الداخلي يساوي ٥ر٥ متر ونصف المحور الراسي وهو وج = ٨ر٩ متر ونفرض ان سمك العقد عند مبدئه وهو البعد اد = ٢٥ر١ متر وسمكه عند المفتاح وهو البعد جهـ = ٠ر١ متر

الجواب - حجم البنا الموجود في هذه القبة وحدها من غير الأكتاف يساوي ٥٩٩ر٤٩ مترا مكعبا

(والحل مبني على ما هو مقرر في سـ٧٩ـد)

## المسألة العاشرة

صالة كبيرة محاطة من جميع الجهات بحائط اسطواني

قاعدته

قاعدته قطع ناقص مثل الصالة العمومية الموجوده بمحل ديوان المعارف ومعقودة من الاعلى بعقد ناقص بحركى ناشئ من دوران نصف القطع الناقص الموجود فى مستوى مبدء العقد والذى هو كناية عن القاعدة العليا لاسطوانة حائط الصاله حول محوره الاكبر الذى هو كناية عن طول هذه الصاله والمطلوب معرفة مقدار فارغ هذه الصاله او بعبارة اخرى ايجاد حجم الهوا الموجود فى هذه الصاله بما فيها من حجم فارغ الجزء الاسطوانى وحجم فارغ العقد وذلك من بعد معرفة ان المحور الاكبر لقطع ناقص قاعدة الاسطوانه المحدده لحائط الصاله من الداخل يساوى ٦ ، ٩٣م ومحوره الاصغر يساوى ٥ ، ٣٥م وارتفاع الصاله من ابتدا سطح البلاط لغاية مستوى مبدء العقد الناقصى المغطى للصاله يساوى ٥ ، ٧٣م

الجواب - حجم الهوا الموجود فى هذه الصاله يساوى ٣٢ و ٢٢٣٠ مترا مكعبا

# الباب السادس

## فى المنحنيات الكثيرة المراكز المعروفة بالمرجونيه

# الفصل الاول

## فى المنحنيات المرجونيه ذوات الثلاثه مراكز

١٥٥ - المنحنى المرجونى الثلاثى الذى يستعمل كثيرا فى فن العمارة وخصوصا فى القناطر ليس فى الحقيقة منحنيا خصوصيا بسيطا بل هو منحنى مركب من ثلاثة اقواس دوائر متصلة مع بعضها بحيث يتكون عن مجموعها منحنى واحد تقليد

القطع الناقص

ويقال ان القوسين المتصلين ببعضهما متفقين معاً اذا كانا متماسين فى نقطة الاتصال بمعنى ان يكون المماس لكل منهما فى النقطة المذكورة واحداً لانه ان لم يحصل هذا الشرط كان المنحنيان المتصلان ببعضهما متقاطعين وصانعين بينهما زاوية رأسها فى نقطة الاتصال او التقاطع

مثلاً القوسان ا ب ، ب ح شكل (٩٧) المتصلان ببعضهما فى نقطة ب ومركز اولهما فى نقطة م ومركز الاخر فى نقطة مَ هما متفقان معاً لانهما متماسان فى نقطة الاتصال ب بما ان المماس لكل منهما فى تلك النقطة واحد وهو المستقيم ء ب ءَ

شكل ٩٧

شكل ٩٨

وأما قوسا ا ب ، ب ح شكل (٩٨) فلا يقال لهما متفقان فى نقطة ب ولو انهما متصلان ببعضهما فيها لانهما ليسا متماسين فى تلك النقطة لكون المماسين لهما فيها وهما ب ء ، ب هـ متميزين

١٥٦ ـ فى طرق رسم المنحنى المرجونى ـ قد علم من تعريف المنحنى المرجونى المقرر فى البند السابق أن هذا المنحنى يتركب كما فى شكل (٩٩) من ثلاثة أقواس دوائر مثل ا م ، م ب مَ ، مَ ء متماسة مع بعضها مثنى ومراكزها ينبغى ان تكون موضوعة على المحورين وا ، و ب المعلومين من رأس المسألة لكى يكون المماسان للمنحنى فى نقطتى ا ، ء اللتين هما مبدأ المنحنى رأسيين والمماس له فى نقطة ب أفقياً

لان

شكل ٩٩

لان هذا الشرط يكون ضروريًا فى حالة مايشتعمل المنحنى المرجونى لعقد عيون القناطر وغيرها فمن ثم يعلم انه اذا رمز بحرف ا الى البعد وا وبالرمز ب الى وب وبالرمزين نقَ ، نق لنصفى القطرين حا ، حَ ب ولسهولة فهم هذه الرموز توضع هكذا

$$\text{وا} = \text{ا} \ ، \ \text{وب} = \text{ب} \ ، \ \text{حا} = \text{نقَ} \ ، \ \text{حَ ب} = \text{نق}$$

يحدث من مثلث ح و حَ القائم الزاوية فى و ان

$$\overline{\text{حَح}}^2 = \overline{\text{حَو}}^2 + \overline{\text{وح}}^2$$

فاذا وضع بدل كل حد ماساواه من الرموز المتقدمة فى هذه المعادلة يحدث

$$(\text{نق} - \text{نقَ})^2 = (\text{نق} - \text{ب})^2 + (\text{ا} - \text{نقَ})^2 \qquad (١)$$

وهذا هو الارتباط الوحيد الواقع بين المجهولين نق ، نقَ فاذا حللنا جميع الحدود المربعة الداخلة فى هذا القانون وحذفنا الحدود المشتركة فى طرفى المعادلة التى تحدث من بعد التحليل ثم استخرجنا نق من المعادلة التى تتبقى بعد الحذف يحدث

$$\text{نق} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ٢\,\text{ا}\,\text{نقَ}}{٢\,(\text{ب} - \text{نقَ})}$$

فاذا اعطى فى هذه المتساوية الى نصف القطر نقَ مقدار اختيارى امكن بواسطتها ايجاد مقدار نصف القطر الثانى نق الموافق له وعلى هذا يعلم انه يمكن بواسطة هذه المعادلة

الحصول على عدة حلول غير متناهية أعنى انه يمكن رسم عدة منحنيات مرجونية كلها موفية للشروط المفروضة فى دراسة المسالة لكنها تختلف عن بعضها فى الهيئة والمنظر واللياقة للاستعمال فى العقود بمعنى انه لا يصح اخذ اى واحد منها بطريقة اختيارية واستعماله فى العقود لأنه ربما كانت هيئته ومنظره وقابليته لا تساعد على ذلك ولهذا قد لزمت التجارب بوضع بعض شروط لانتخاب الاليق منها حتى يكون منظره لطيفا وشكله موافقا ولتنوع هذه الشروط بحسب الاحتياجات قد تنوعت طرق رسم المنحنى المرجونى وها نحن شارعون فى ذكر الكثير الاستعمال منها على الترتيب فنقول

س ١٥٧ الطريقة الأولى قد جرت العادة فى الغالب ان يجعل القوس ا م شكل (٩٩) السابق ٦٠° فينبنى على ذلك صيرورة المثلث حـ حً حَ المتساوى الساقين مثلثا متساوى الاضلاع ويصير القوس م ب مَ مساويا الى ٦٠° كذلك وحينئذ فلو رمز بحرف س الى البعد و حـ المجهول

لكان $\text{حـ}َ = ا - س$ ، $\text{حـ} = ا + س$

وتؤول معادلة (١) السابقة من بعد كل اختصار الى

$$س^٢ - (ا - ب) س = \frac{(ا - ب)^٢}{٢}$$

التى يؤخذ منها أن

$$س = \frac{ا - ب}{٢} + \frac{ا - ب}{٢} \sqrt{٣} \quad \ldots\ldots \quad (٢)$$

وقد صرفنا النظر هنا عن المقدار السالب للمجهول س للاسباب المعلومة

واما مقدار س المبين بنمرة (٢) فيمكن بيانه بالطريقة الرسمية كما سيأتى

وهو

وهوان يؤخذ البعد وهـ = ا - ب ، وح = $\frac{١}{٢}$ وهـ
ثم يرسم على البعد هـح نصف دائرة يكون هو قطرا لها فهذا
النصف دائرة يقطع المحور الرأسي في نقطة مثل ط فاذا نقل
الوتر ح ط من ح الى حـ كان البعد وحـ هو مقدار
س المبين بمعادلة ( ٥ )
فيرسم اذ ذاك على البعد احـ مثلث متساوى الاضلاع
مثل ام حـ الذى اذا مد ضلعه م حـ على استقامته حتى
يقطع امتداد المحور الرأسي في نقطة مثل حَ كانت هي مركز
القوس م ب حَ وكان البعد حَ م نصف قطره
ولاجل البرهنة على أن وحـ يساوى لمقدار س المبين
في معادلة ( ٥ ) يقال من الشكل ظاهر أن

وحـ = وح + حـ ح ........ (٧)

لكن كان وح = $\frac{ا - ب}{٢}$ بالعمل

وكذا معلوم بمقتضى احدى نظريات الهندسة العادية ان الوتر
ح ط وسط متناسب بين ح هـ ، ح و فيكون

$$\overline{ح ط}^{٢} = \left[ ( ا - ب ) + \left( \frac{ا - ب}{٢} \right) \right] \frac{ا - ب}{٢}$$

وباجراء عملية الضرب واختصار الناتج يكون

$$\overline{ح ط}^{٢} = ٣ \frac{( ا - ب )^{٢}}{٤}$$

وبأخذ الجذر يحدث

$$ح ط = \frac{ا - ب}{٢} \sqrt{٣}$$

فاذا وضعنا بدلا عن كل من وح ، ح حـ المساوى الى
ح ط مقداريهما في معادلة (٧) لكان

$$وح = \frac{ا-ب}{٢} + \frac{ا-ب}{٢}\sqrt{٣}$$

وهذا هو ما اردنا بيانه

١٥٨ - الطريقة الثانية - قد أعطى بعض المؤلفين قاعدة مختصرة لبيان مقدار س بالرسم لكنها تقريبية ويمكن استعمالها مع النجاح فى رسم العقود ذوات الابعاد الصغيرة جدا أو فى رسم زخارف العمارات وما أشبه ذلك

وغاية هذه الطريقة ان يؤخذ البعد وهـ مساويا الى ا - ب ويضاف عليه بعد مثل هـ حَ مساو لثلث وهـ فتكون نقطة حَ هى المركز الاول المطلوب ويكون وحَ مساويًا بالتقريب الى مقدار س الموجود بمعادلة ( ٢ )

ولبيان ذلك يكفى أن نبرهن على أن البعد وحَ $= \frac{٤}{٣}$ (ا-ب) تقريبا وهذا هو الواقع لأن

$$\sqrt{٢} = \sqrt{\frac{١٨}{٩}} = \frac{٥}{٣}$$ مقربا من ٠٦ ٪

فاذا نظرنا الى مقدار س المبين فى معادلة ( ٢ ) نجد أن

$$س = \frac{ا-ب}{٢} + \frac{ا-ب}{٢}\sqrt{٢}$$

وبأخذ $\frac{ا-ب}{٢}$ مضروبا مشتركا فى الطرف الثانى يحدث

$$س = \frac{ا-ب}{٢}\left(١ + \sqrt{٢}\right)$$

أو يكون

$$س = \frac{ا-ب}{٢}\left(١ + \frac{٥}{٣}\right) = \frac{ا-ب}{٢} \times \frac{٨}{٣}$$

أو

$$س = \frac{٨}{٦}\left(ا-ب\right) = \frac{٤}{٣}\left(ا-ب\right)$$ تقريبا

وهو المطلوب

ويكون مقدار س المستخرج بهذه الكيفية أصغر من حقيقته

بقدر

بقدر ٠٫٠٣ من الفرق (ا - ب) تقريباً

١٥٩ - الطريقة الثالثة — غاية هذه الطريقة أن يرسم على نصف المحور الأكبر و ا مثلث متساوى الأضلاع كالمثلث و هـ ا التى تكون جميع زواياه مساوية الى ٦٠° كما هو مبين فى الشكل (١٠٠)

شكل ١٠٠

ثم نجعل نقطة و مركزا وبنصف القطر و ب نرسم قوس الدائرة ب ت ونصل من نقطة ب الى نقطة تقاطع ذلك القوس بالضلع و هـ وهى نقطة ت بمستقيم ونمده حتى يتقاطع مع الضلع هـ ا فى نقطة مثل نقطة م فيرسم منها م ح حً موازيا الى هـ و فيقطع المحورين فى نقطتى ح ، حً تكونان مركزين للمنحنى المجوف وإذن يكفى لرسمه ان تجعل نقطة ح مركزا وبنصف القطر ح ا يرسم القوس ا م ثم تجعل حً مركزا وبنصف القطر حً ب يرسم القوس م ب وأما النصف الايسر فيرسم بالتماثل مع النصف الايمن

ولاجل البرهنة على صحة هذه العملية يكفى ان نثبت على ان البعد و ح يساوى لمقدار س المبين فى المعادلة (٢) المتقدمة فى البعدين السابقين أو الى المقدار المساوى له وهو

$$س = \left(\frac{ا - ب}{٢}\right)\left(١ + \sqrt{٣}\right)$$

ولذلك يقال ظاهر من الشكل بناء على الاجراآت التي عملت ان

$$وحـ = مَ هـ$$

ومن مثلث مَ هـ تَ يمكن ان يستخرج مقدار مَ هـ فنجد ان

$$مَ هـ = تَ هـ \times \frac{حا ٧٥^{\circ}}{حا ٤٥^{\circ}}$$

وعليه يكون

$$وحـ = تَ هـ \times \frac{حا ٧٥^{\circ}}{حا ٤٥^{\circ}} \quad \ldots\ldots \quad (هـ)$$

ولكن معلوم ان $تَ هـ = (أ - ب_{١})$

وان $حا ٧٥^{\circ} = حا (٣٠^{\circ} + ٤٥^{\circ}) = حا ٣٠^{\circ} حتا ٤٥^{\circ} + حا ٤٥^{\circ} حتا ٣٠^{\circ}$

فاذا لاحظنا ان $حا ٣٠^{\circ} = \frac{١}{٢}$ و $حتا ٣٠^{\circ} = \sqrt{\frac{٣}{٤}}$

وان

$حا ٤٥^{\circ} = \sqrt{\frac{١}{٢}}$ و $حتا ٤٥^{\circ} = \sqrt{\frac{١}{٢}}$ ايضا

اتضح لنا ان

$$حا ٧٥^{\circ} = \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} \times \sqrt{\frac{٣}{٤}}$$

وحينئذ اذا وضع بدلا عن كل حد مقداره في معادلة (هـ) حدث

$$وحـ = (أ - ب_{١}) \frac{\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} \times \sqrt{\frac{٣}{٤}}}{\sqrt{\frac{١}{٢}}} = (أ - ب_{١}) \frac{\sqrt{\frac{١}{٢}}\left(\frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٤}}\right)}{\sqrt{\frac{١}{٢}}}$$

أو يكون

$$وحـ = (أ - ب_{١})\left(\frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٤}}\right) = (أ - ب_{١})\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{٣}\right)$$

أو يكون

وحـ

وح = (ا − ب) × ½ (١ + √٣) = (ا − ب)/٢ (١ + √٣)

وحيث ظهر من سياق البرهان أن البعد وح مساوٍ للمقدار س السابق فهذا كافٍ لاثبات المطلوب

سند ١٦٠ الطريقة الرابعة — هذه الطريقة التي سنقتصر فيها على شرح كيفية العمل بها بدون أن نورد اثباتها لعلوه وبُعده على تلامذة التجهيزية الذين قد اعددت كتابي هذا لهم ولمن في درجة معارفهم هي الطريقة التي يجب استعمالها في حالة ما يراد رسم منحنى مرجوني تكون النسبة الواقعة بين نصفي قطريه لعدم وجود أصغر جميع النسب الممكن وقوعها بين نصفي القطرين المذكورين أعني هي أقرب تلك النسب الى الواحد الصحيح

وغاية هذه الطريقة هي أن نصل أولاً الوتر ا ب شكل (١٠١) ثم يطرح منه البعد ب هـ المساوى الى الفرق (ا − ب) الواقع بين نصفي المحورين ثم يقام من نقطة ط التي هي منتصف الجزء الباقي من الوتر عمود مثل ط ح حَ عليه فهذا العمود يقطع المحورين في نقطتين مثل ح حَ تكونان مركزي القوسين ام م ب ويكمل رسم النصف الايمن من المنحنى بالتماثل مع النصف الايسر الذي رسم

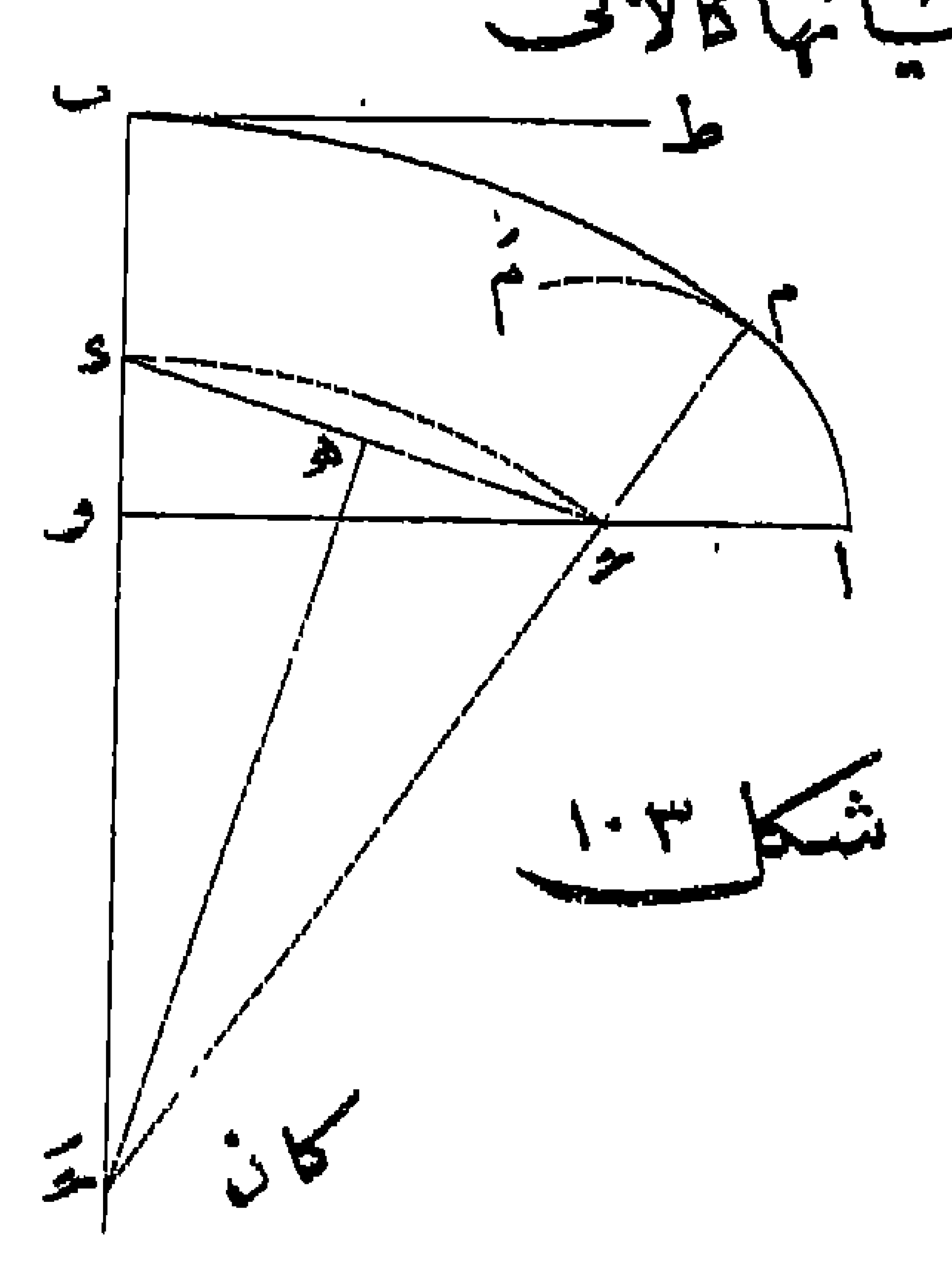
شكل ١٠١

سند ١٦١ الطريقة الخامسة — هذه الطريقة التي لم نذكر اثباتها لنفس السبب الذي أوردناه في البند السابق يلزم استعمالها في حالة ما يراد رسم المنحنى المرجوني بحيث يكون الفرق

بين نصفى قطريه ... بعد أصغر ما يمكن وهى ان يؤخذ البعدان و ء ، و هـ شكل (١٠٢) متساويين وكل منهما مساو الى الفرق (ا - ب) الكائن بين نصفى المحورين ثم نصل المستقيم ء هـ وينصف بنقطة مثل ط وينقل البعد ء ط على المحور الافقى من ابتدا نقطة ء لحد نقطة مثل حـ وكذا ينقل البعد هـ ط بالابتدا من نقطة هـ لحد نقطة مثل حَ على المحور الراسى فتكون نقطتا حـ ، حَ هما مركزا القوسين ا م ، م ب ويرسم النصف الايمن بالتماثل كما مر

١٦٢ الطريقة السادسة — هذه الطريقة تستعمل فى حالة ما يراد رسم القوس الاسفل اعنى المجاور لمبدأ المنحنى بكيفية اختيارية حسب ما تقتضيه استعمالات المنحنى المرجونى الذى يراد انشاؤه ثم يرسم القوس الثانى الاكبر مماسا له وللمستقيم الافقى المار بالرأس العليا للمنحنى وبيانها كالآتى

شكل ١٠٢




شكل ١٠٣

مثلا اذا أريد رسم منحنى مرجونى ذى ثلاثة مراكز على نصفى المحورين و ا ، و ب شكل (١٠٣) يبتدأ أولا برسم القوس ا م مَ الغير محدود ويؤخذ نصف قطره وهو حـ ا اختياريا بحسب ما يرام اعطاؤه الى ذلك القوس من التحديب والارتفاع كثيرا

كان أو قليلاً فتؤول المسئلة بعد ذلك الى رسم قوس كالقوس م ب بحيث يكون مماساً للقوس الغير المحدود ا م مَ فى نقطة مثل م وللمستقيم الافقى ب ط فى نقطة ب

ولاجل حل هذه المسألة الفرعية نفرضها محلولة وأن القوس المطلوب هو م ب الذى مركزه نقطة حَ ثم جعلنا هذه النقطة مركزا وبنصف القطر ح حَ رسمنا قوس دائرة فيقطع المحور و ب فى نقطة مثل ء ويكون

ب ء = ح م = ح ا

وبناءً على ذلك يمكن تعيين نقطة ء من أول الأمر بأن يؤخذ من ابتدا نقطة ب بعد ب ء على المحور الرأسى مساويا لنصف القطر ح ا الذى أخذ بالاختيار ولما كان المركز حَ المجهول متساوى البعد عن نقطتى ح ، ء فيمكن حينئذ تعيينه بأن يوصل المستقيم ح ء ويقام على منتصفه عمود مثل ه حَ ويمد حتى يتقابل مع المحور الرأسى فى نقطة حَ فتكون هى المركز الثانى المطلوب وبعد ذلك نصل منها الى ح بمستقيم حَ ح ويمد حتى يحدد القوس الذى رسم فى مبدأ الأمر غير محدود بنقطة مثل م ثم نجعل نقطة حَ مركزا وبنصف قطر مساو الى حَ م أو الى حَ ب نرسم القوس م ب فيكون هو القوس المطلوب ويرسم النصف الثانى من المنحنى المرجولى بمثل ما رسم هذا النصف الأول

ش ١٦٦ الطريقة السابعة هذه الطريقة تستعمل فى حالة ما يكون المعلوم المحور الأكبر للمنحنى المرجولى فقط ويراد رسم ذلك المنحنى المرجولى بحيث يكون محوره الثانى المجهول مناسبا للمحور المعلوم وان يكون منظره وشكله قريبين من منظر وشكل القطع الناقص

مثلا اذا اريد رسم المنحنى المرجولى ا م ب مَ أَ

شكل ( ١٠٤ ) على المحور
اَ ا المعلوم يقسم المحور المذكور
الى ثلاثة اجزاء متساوية
اح ، حح َ ، حَ ا
ويقام من منتصف الجزء
المتوسط وهى نقطة و عمود
مثل وحً على المحور ا اَ
ثم تجعل نقطة ح مركزا
وبنصف القطر ح ا يرسم
القوس ا حً الذى يقطع
المحور الرأسى فى نقطة حً التى تكون هى مركز القوس الاوسط
من المنحنى المطلوب ونقطتا ح ، حَ هما مركزا القوسين المتطرفين
فنصل حينئذ من حً الى ح والى حَ بمستقيمى حً ح
، حً حَ الغير محدودين
ثم تجعل نقطة ح مركزا وبنصف القطر ح ا يرسم القوس
ا م ويحدد بالمستقيم حً ح م ثم تجعل نقطة حً مركزا
وبنصف القطر حً م يرسم القوس م ب مَ ويتمم رسم
القوس الباقى كما لمنا ظرله

شكل ١٠٤

# الفصل الثانى

## فى المنحنيات المرجونية ذات الخمسة مراكز فما فوقها

١٦٤ ــ حينما يكون نصف المحور الرأسى و ب شكل (١٠٥)
من المنحنى المرجونى أقل من ثلث الفتحة ا اَ ينبغى ان يستعمل
لرسم ذلك المنحنى خمسة مراكز لكى لا يحصل تغير انحنا
فجئى عند نقط الاتصال بل يكون تغير الانحنا تدريجيا

وغير محسوس
وقبل ان نشرح
كيفية رسم المنحنى
المرجونى ذى الخمسة
مراكز نذكر اولا
بعض شروط قد
دلت التجارب
على لزوم مراعاتها
لاجل ان يكون
المنحنى الحادث ذا
هيئة وشكل
مناسبين
وملائمين للاحوال
التى يستعمل فيها
وهى الشروط الاتية

شكل ١٠٥

أولاً يشترط دائما ان يكون مركز القوس الاول ا م موجودا
على المحور الافقى ومركز القوس الاوسط موجودا على المحور الراسى
وذلك لاجل ان يكون المنحنى مماسا للراسى المار بنقطة ا
وللافقى المار بنقطة ب فان هذا الشرط مهم جدا
خصوصا حينما يستعمل المنحنى المرجونى فى عمل العقود

ثانيا اذا فرضنا ان المنحنى المطلوب هو المنحنى ا م ه ب ح
واعتبرنا نصفه الايسر ا م ه ب المركب من القوس
ا م الذى مركزه نقطة حـ ونصف قطره حـ ا مرموز
له بحرف نق ثم من القوس م ه الذى مركزه
حَ ونصف قطره حَ م = حَ ه مرموز له بحرف
نقَ واخيرا من القوس ه ب الذى مركزه نقطة حً
ونصف قطره حً ه = حً ب مرموز له بحرف نقً

ومرموز أيضا لنصف المحور و ا بحرف ا ولنصف المحور الآخر و ب بحرف ب لزم دائما مراعاة الثلاثة شروط الآتية

أولا أن يكون البعد وحَ = ٣ . و ح أعني أن

نق — ب = ٣ ( ا — نق )

وثانيا أن تكون نقطة هـ التي يتلاقى فيها نصف القطر م ح حَ مع المحور الراسي موجودة في منتصف البعد وحَ أعني أن يكون

و هـ = ½ . وحَ

وثالثا أن تكون نقطة ل التي يتلاقى فيها نصف القطر ٤ حَ حَ بالمحور الافقي موضوعة في ثلث البعد و ح أعني أن يكون البعد ح ل = ⅓ . ح و

وبناءً على ذلك اذا بيّنا هذه الثلاثة شروط بدلالة نق ، نقَ ، نقً أمكن أن يستنبط منها معادلة ذات درجة ثانية مجهولها نقً بواسطتها يمكن تعيين مقدار هذا المجهول ومن بعد معرفته يعلم بالضرورة نصفا القطرين الاخران نق ، نقَ لكن بما أن هذه المعادلة تكون دائما كثيرة التركيب بحيث يصعب استعمالها قد جرت العادة بترك الحل بهذه الصورة واستعواضه بما سيأتي

ش ١٦٥ وهو انه ينتخب بالاختيار نصف قطر ابتدائي مثل ا ء ويؤخذ بمقتضى الشرط الاول من الثلاثة شروط المتقدمة البعد و ءً = ٣ و ء ونصل من نقطة ء الى نقطة هَ وسط البعد و ءً فيتحدد بذلك القوس الاول ا مَ ثم يؤخذ البعد ء لَ = ⅓ . و ء ويوصل المستقيم لَ ءً فيقطع ء هَ في نقطة مثل نقطة ءَ تكون هي مركز القوس الثاني مَ ٤َ ثم يوصل هذا القوس بالقوس الثالث ٤َ تَ

الذى

الذى يرسم بجعل نقطة ءً مركزا والبعد ءًءَ نصف قطر له

انما بواسطة هذه العملية لا يكون ارتفاع المضى المساعد المتحصل وهو البعد وتَ عين الارتفاع المعلوم من راس المسئلة لكن مع ذلك حيث كان المضلع و ء ءَ ءً مشابها بالبداهة الى المضلع المجهول وحَحً

فاذا وضعت الرموز الآتية

وح = س ، وحً = ص ، وحَ + حَحً = ع و

وء = ه ، وءً = ك ، وءَ + ءَءً = ف

تحصلت الارتباطات الآتية ذات الدرجة الأولى

س/ه = ص/ك ، س/ه = ع/ف ، ع + ا − س = ص + ب١

التى يستنتج منها بعد حذف ع أن

س = (ا − ب١) ه / (ه + ك − ف) ، ص = (ا − ب١) ك / (ه + ك − ف) ........ (٢)

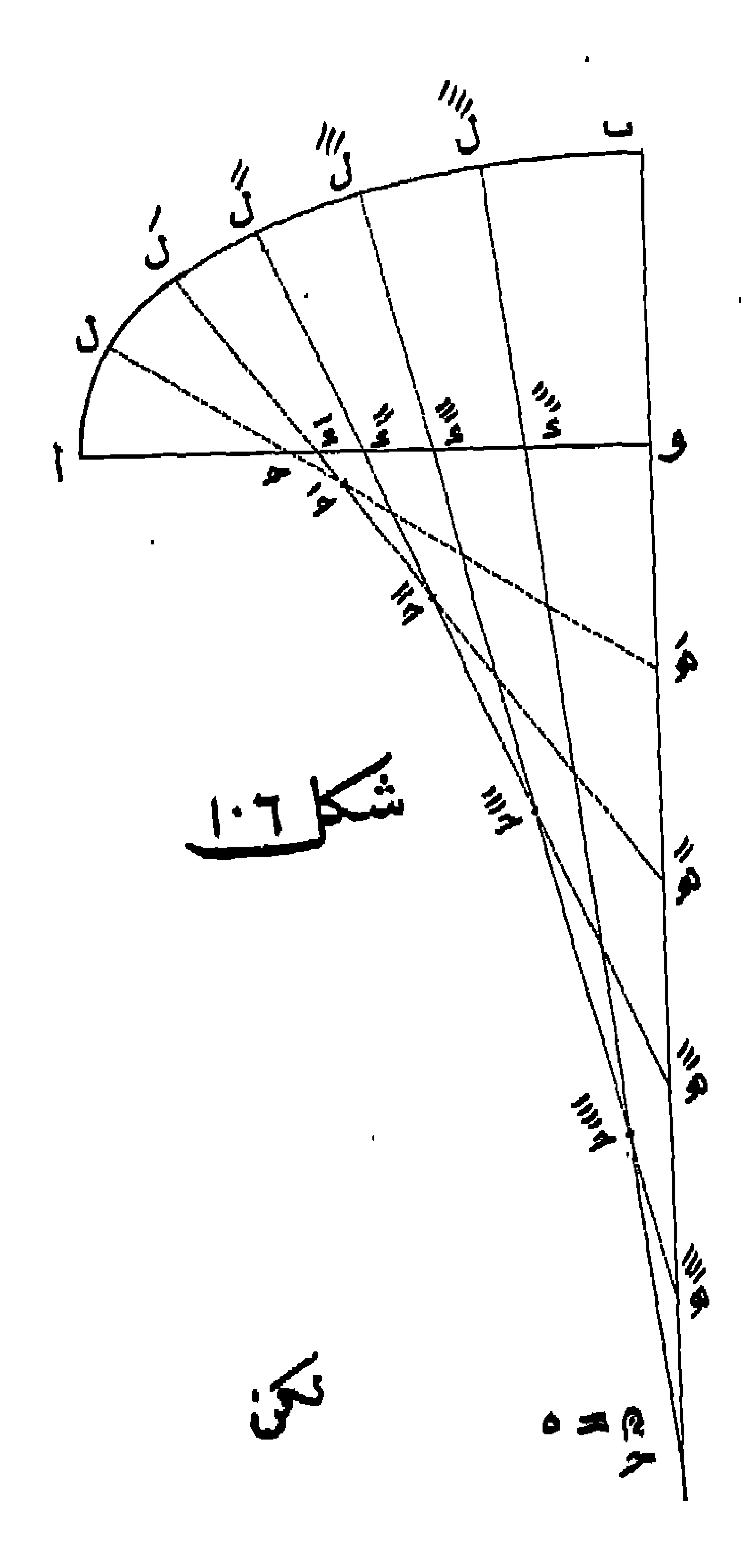
وهذه هى مقادير يسهل حسابها أو اجراها بالرسم لان مقادير الخطوط ه ، ك ، ف علمت من التجربة التى عملت مقدما فضلا عن كونه معلوما ان ك = ٢ ه لكننا أردنا ان نكتب قانونى نمرة (٢) هنا على صورة يمكن تطبيقها على اى نسبة فرض وقوعها بين البعد وح ، وحً ولو أن النسبة ١ الى ٢ هى النسبة التى ظهر انها هى الاكثر لياقة لذلك من غيرها

١٦٦ــد في المنحنى المرجولى الكثير المراكز ــ يمكن تطبيق الطريقة السابقة على رسم اى منحنى مرجولى مركب من جملة اقواس دوائر عددها اختيارى كالعدد ٢ ﻫ + ١ مثلا بفرض أن ﻫ عدد ما حيثما اتفق

ويلزم لذلك أن يؤخذ كما في شكل (١٠٦) البعد وحَ مساويا على الدوام الى ٤ . وحـ وأن يقسم البعد وحَ الى أقسام متساوية عددها ﻫ والبعد حـو الى اقسام عددها ﻫ لكن بشرط ان تكون نسبة تلك الاقسام الى بعضها كنسبة الاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ..... ، ﻫ الى بعضها

فمثلا اذا فرض أن ﻫ = ٥ كان المنحنى المرجولى الذى يراد الحصول عليه مركبا من احدى عشر قوس دائرة لانه اذا وضع عدد (٥) بدلا عن ﻫ في الكمية ٢ ﻫ + ١ لكانت تساوى ١١

ولاجل تعيين مراكز وانصاف أقطار هذه الاقواس يؤخذ ابتداء نصف القطر أ حـ للقوس الاول بالاختيار ثم يؤخذ البعد وحَ = ٤ . وحـ ويقسم البعد وحَ الى خمسة أقسام متساوية كما هو مبين في الشكل وكذا يقسم البعد و حـ الى خمسة أقسام أيضا




شكل ١٠٦

لكن بشرط ان تكون نسبة

حء : ءَءً : ءً ءٌ : ءٌ ءٍ : ءٍ و : : ١ : ٢ : ٣ : ٤ : ٥

وبعد ذلك اذا وصل من ح الى هَ ومن ءَ الى هً
ومن ءً الى هٌ والخ تكون المضلع حءَءًءٌءٍ
الذى رؤسه هى مراكز الستة أقواس المكونة لنصف المنحنى

لكن حيث ان ارتفاع المنحنى المتصل وهو وب لم يكن فى جميع الاوقات عين ارتفاع المنحنى المطلوب فيعتبر المضلع المتقدم كمنحنى تجربى مساعد ثم من بعد الرمز بحرف س ، ص للبعدين وح ، وحٍ الحقيقيين والموافقين للمنحنى الاصلى الذى ارتفاعه ب يمكن الحصول أيضا على ارتباطات مشابهة للارتباطات المقررة فى ند ١٦٥ ويستنبط منها أخيرا المقدارين الآتيين

$$س = \frac{(١ - ب) ق}{٤ ق - ف} ، ص = ٢ س$$

وفى هذين الارتباطين ف رمز لمجموع أضلاع المضلع حءَ ءًءٌءٍ الذى وجد فى اثناء اجراء العملية التحضيرية

وقس على هذا فى رسم ذى السبعة مراكز وذى التسعة وذى الثلاثة عشر وهكذا

ند ١٦٧ فى المماس والعمودى للمنحنى المرجونى — من حيث ان المنحنى المرجونى لم يكن مركبا سوى من جملة اقواس دوائر فالمماس له او العمودى عليه فى أى نقطة منه ليس هو الا المماس او العمودى لقوس الدائرة الذى توجد عليه هذه النقطة

ولما كان الامر كما ذكر فهذا التأشير كاف

# الباب السابع

## في المنحني المسمى بحلزون ارشميد

بند ١٦٨ يطلق اسم منحنى حلزونى عموما على كل منحن متولد من تحرك نقطة تدور الى ما لا نهاية حول نقطة ثابتة تسمى قطبا حالة كونها آخذة في التباعد عن هذه النقطة الثابتة شيأ فشيأ

وهذه المنحنيات تتركب من لفات غير متناهية واللفة هي كناية عن جزء المنحنى الذى ترسمه النقطة المتحركة في مدة دورانها دورة كاملة

ولاجل سهولة تصور كيفية تولد هذه المنحنيات يمكننا ان نتوهم ان النقطة الراسمة للمنحنى الحلزونى تتحرك على مستقيم حالة كون هذا المستقيم يدور حول القطب وأبسط هذه المنحنيات هو المنحنى المعروف بحلزون ارشميد وهو الذى سنقتصر على ذكره هنا لكثرة لزومه واحتياجاته في الاعمال فنقول

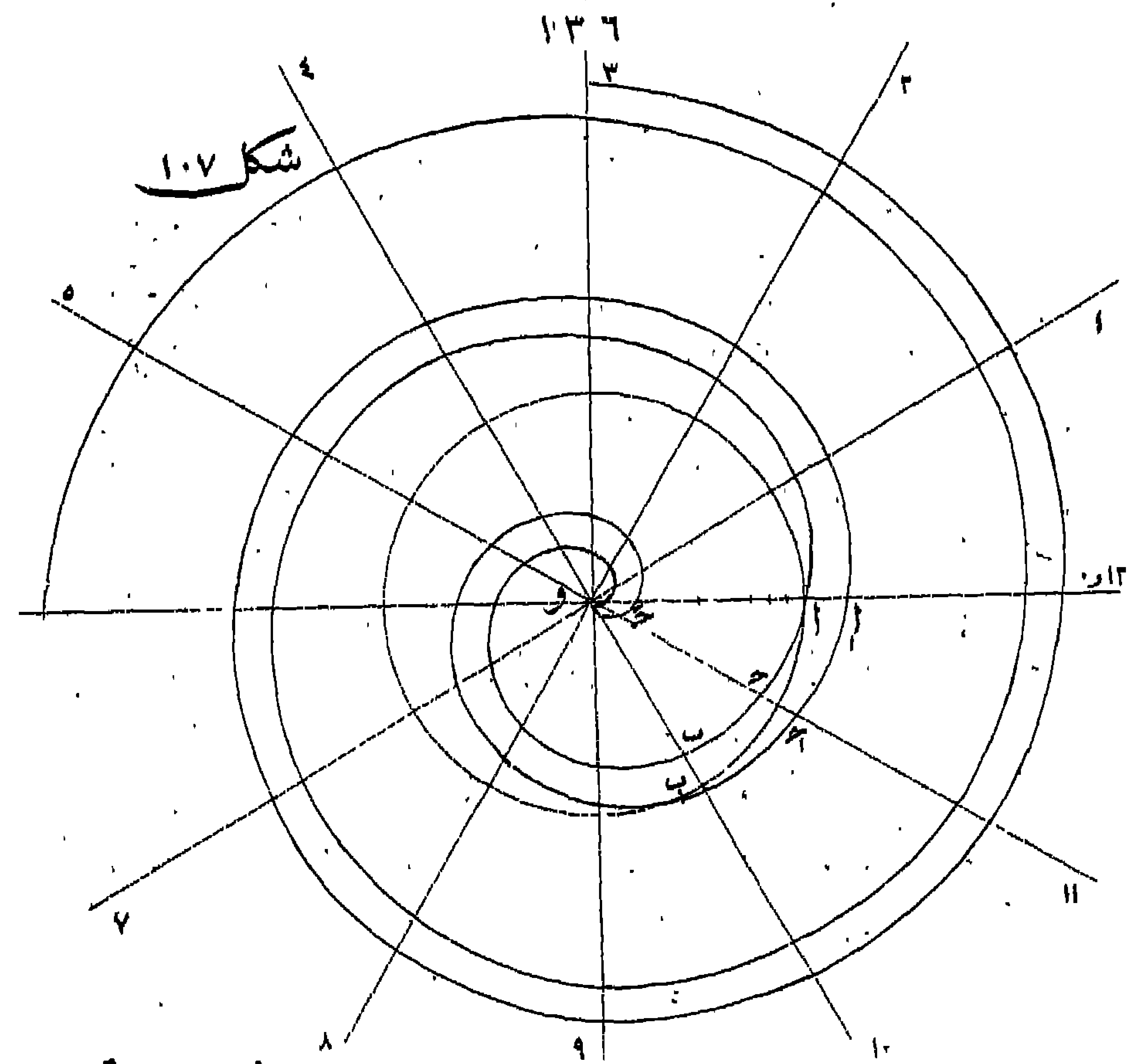
بند ١٦٩ حلزون ارشميد هو المنحنى المستوى المتولد من حركة نقطة على مستقيم تحركا منتظما حالة كون هذا المستقيم يتحرك هو الآخر بانتظام أيضا حول نقطة ثابتة

ويفهم من هذا التعريف انه اذا اعتبرت نقطة ثابتة على المستقيم المتحرك غير النقطة الراسمة فانها وان كانت ثابتة الوضع بالنسبة للمستقيم تتحرك معه حول القطب وترسم في اثناء حركتها محيط دائرة بحيث تكون المسافات التى تقطعها هذه النقطة على محيط الدائرة هذا مناسبة للمسافات التى تقطعها

النقطة الراسمة الأصلية على المستقيم المتحرك
ولاجل السهولة يمكننا ان نأخذ محيط دائرة نصف قطرها الوحده
وحينئذ فتكون النسبة الثابتة التى قلنا انها موجودة بين المسافات
المقطوعة على محيط الدائرة وعلى المستقيم المتحرك هى النسبة المخصصة
لكل حلزون عما دونه وبها تتميز الحلزونات المختلفة عن بعضها
ومن الواضح الجلى انه كلما دار نصف القطر القطبى (وهو جزء
المستقيم المتحرك المحصور بين نقطة من الحلزون والقطب)
دورة كاملة زاد طوله بمقدار ثابت بحيث ان الاجزاء من
انصاف اقطار البورية المحصورة بين أى لفتين متتاليتين
من الحلزون تكون كلها متساوية ويطلق على كل واحد منها
اسم خطوة الحلزون او وتر اللفة
ومتى علم وتر اللفه لحلزون مجهولا ومتى علمت النسبة الثابتة
الكائنة بين المسافات المقطوعة صار الحلزون معينا ومحددا
لاننا اذا رمزنا بحرف ل لوتر اللفه وبحرف ك لنسبة
المسافات كان بناء على تعريف المنحنى

$$\frac{ل}{٢ط} = ك$$

ولا يخفى انه من السهل تعيين احدى الكميتين ل ، ك من هذه
المتساوية متى علمت الأخرى وحرف ط الداخل فى مقام
الطرف الاول رمز للنسبة التقريبية
بند ١٧٠ فى رسم حلزون ارشميد — حلزون ارشميد
يمكن رسمه نقطة فنقطة بطريقة سهلة جدا غايتها أن يرسم
حول قطبه (و) شكل (١٠٧) محيط دائرة بنصف قطر حيثما
اتفق ويقسم الى عدد اختيارى من الاقسام المتساوية
ولتكن اثنى عشر قسما متساوية مثلا




ثم نصل من نقط التقاسيم الى القطب بمستقيمات غير محدودة نمرها بالمرور عليها فى جهة واحدة بالنمر صفر، ١، ٢، ٣، ٤، ...... ١١، ١٢، ١٣ والخ وبعد ذلك نأخذ على الوضع الاول لنصف القطر القطبى بعدا مثل و ا مساويا الى وتر اللفة المعلوم من راس المسئلة ثم نقسم هذا البعد الى اثنى عشر قسما متساوية ونضع من هذه الاقسام قسما واحدا على المستقيم المنمر بنمرة ١ وقسمين على المنمر بنمرة ٢ وثلاثة على المستقيم ٣ وهكذا الى أن يوضع على المستقيمات ١١، ١٢ أبعاد متساوية الى ١١، ١٢ قسما من اقسام وتر اللفة و ا المفروض وبهذه الكيفية تتعين لنا ثلاثة عشر نقطة من المنحنى الحلزونى

فاذا جمعت بخط متصل كان هو اللفة الأولى من المنحنى المذكور ولتعيين نقط اللفة الثانية يؤخذ على المستقيمات المنمرة ٠ ، ١ ، ٢ ، ....... الخ بالابتداء من نقط اللفة الاولى التى تعينت أبعاد متساوية كل منها يساوى $\frac{١}{١٢}$ و ا وتجمع أطراف هذه الابعاد بمنحنى اللفة الثانية ولايجاد لفات أخرى بقدر ما يراد يعمل كما عمل فى تعيين اللفة الثانية من بعد معرفة اللفة الأولى .

س ١٧١ د فى الحلزونين الرفيقين — اذا رسم كما فى الشكل المتقدم منحنى حلزونى آخر حول نفس قطب الحلزون الاول وبوتر لفة مساوٍ لوتر لفة المنحنى الاول المذكور انما يختلف عنه فقط بوضع نصف القطر القطبى الابتدائى قيل لهذين الحلزونين رفيقان أو مترافقان ويستعملان كثيرا فى رسم زخارف العمارة التى تعمل للزينة وتسمى آذان جمع اذن كاذنى العمود اليونيكى مثلاً

ومن المشاهد بالسهولة ان الاجزاء الخطية المنحصرة ما بين حلزونين مترافقين من انصاف الاقطار القطبية تكون كلها متساوية

وفى الواقع لأننا اذا فرضنا أن المستقيم ( و ١٠ ) هو الوضع الابتدائى لنصف القطر البورى من الحلزون الثانى كان البعد و ب مساويا الى $\frac{١٠}{١٢}$ من الوتر و ا وحيث انه لزم عند رسم الحلزون الثانى ان أخذ على نصف القطر القطبى ( و ١١ ) بعد و حَ مساويا الى $\frac{١}{١٢}$ من و ا

وكان و ح = $\frac{١١}{١٢}$ من و ا

فيكون حينئذ ح حَ = $\frac{١٠}{١٢}$ و ا

لكن كان و ب = $\frac{١٠}{١٢}$ و ا

فيكون حينئذ

ح حَ = و ب

وبما أن

حَ حٓ = و ب

لان كلاً منهما يساوى لوتر اللفة المشترك فيكون

حَ حٓ - حَ حَ = و ب - و ت

أو

ب ب = ح حٓ

وبمثل ذلك يبرهن على ان البعد ح حٓ = ا ا وهلم جرا فيثبت المطلوب

س ١٧٢ المماس للحلزون وتحت مماسته — اذا فرض ان نقطتى م و مَ شكل (١٠٨) متقاربتان جدا من بعضهما على حلزون ارشميد ووصل القاطع م مَ ونصفا القطرين و م و و مَ فلا شك ان هذا القاطع يصير مماسًا للمنحنى عند ما تتحد نقطتا م و مَ ببعضهما وتصيران نقطة واحدة ثم تجعل نقطة و القطب مركزا ونرسم قوس الدائرة م ح بنصف القطر و م فيقطع نصف القطر و مَ فى نقطة مثل ح ويكون البعد ح مَ عبارة عن مقدار الزيادة التى زاد بها نصف القطر عندما مر من الوضع و م الى الوضع و مَ

شكل ١٠٨

اذا تقرر هذا ورسم من نقطة ما خوذة بالاختيار على القاطع كنقطة س مستقيم مثل س ط موازى مَ ح حدث من مثلثى م مَ ح و م س ط المتشابهين أن

طس : م ط :: مَ ۲ : م ۲ ...... [١]

ومن جهة أخرى اذا رسم محيط دائرة اخرى بنصف قطر مساو للوحدة فانه يقطع ضلعي الزاوية م و ۲ في نقطتي م١ ، ۲١ ويحدد بينهما قوس م١ ۲١ ويكون

قوس م ۲ : قوس م١ ۲١ :: وم : وم١ :: وم : ١ [٢]

فاذا رمزنا بحرف هـ الى المسافة الكلية التي قطعتها نقطة م١ في اثناء ما سارت النقطة الراسمة للحلزون من القطب الى ان وصلت لنقطة م (وليعلم ان المسافة هـ تكون مشتملة على المحيط مرارا اذا لم تكن نقطة م من اللفة الاولى) وبناء على تعريف المنحني يكون

مَ ۲ : قوس م١ ۲١ :: وم : هـ

وبناء على تناسب [٢] يكون

مَ ۲ : قوس م ۲ :: ١ : هـ

فاذا لاحظنا الآن أنه لداعي كون القوس م ۲ صغيرا جدا فيكاد ان ينعدم وتره وحينئذ فالخطأ الذي يوجد عندما يعوض هذا القوس بوتره يقل شيأً فشيأً كلما قربت نقطتا م ، مَ من بعضهما واذن فيحدث هذا التناسب التقريبي

مَ ۲ : م ۲ :: مَ ۲ : قوس م ۲ :: ١ : هـ

ومنه يحدث بناء على تناسب [١]

طس : م ط :: ١ : هـ [٣]

وهذا التناسب التقريبي يصير حقيقيا بالضبط عند النهاية

اعنى عندما يتحد نصفا القطرين وم ، وم بعضهما لكن يصير اذ ذاك المستقيم م ط مماسا للدائرة ويكون بالضرورة عموديا على وم ويصير مثلث م ط س قائم الزاوية فى ط ويكون مستقيم م س هو المماس للمنحنى المطلوب

اذا تقرر هذا نمد المماس الى ان يتلاقى فى نقطة مثل ح شكل (١٠٩) مع المستقيم وح المقام من القطب عموديا على نصف القطر وم فالبعد وح هو الذى يقال له تحت المماس ويحدث اذن من مثلثى ط س م ، وم ح المتشابهين ان نسبة

شكل ١٠٩



وم : وح : ط س : م ط :: ١ : هـ

ومنه يكون

وح = وم × هـ

وحيث ان اثناء ما ترسم نقطة م المسافة هـ فنقطة م اذا اعتبرت ثابتة على نصف القطر البورى المتحرك تقطع على محيط دائرة متحد المركز مع المحيط وم مسافة مقدار طولها هو بالضبط عبارة عن وم × هـ فحينئذ يمكن تقرير النظرية الآتية

نظرية — تحت المماس فى حلزون ارشميد يساوى لطول القوس الذى كانت تقطعه النقطة الراسمة للمنحنى بفرض ثباتها على نصف القطر البورى فى مدة ما يمر هذا النصف قطر

قطر من وضعه الابتدائى الى الوضع المار بنقطة التماس

١٧٣ د في رسم المماس والعمودى للحلزون الارشميدى — النظرية المتقدمة تعطى إلينا الطريقة اللازمة لرسم المماس لحلزون ارشميد فى نقطة مفروضة عليه

فلتكن مثلا م شكل (١٠٩) هى نقطة التماس المعلومة ويقام من القطب مستقيم مثل ء ح عمودى على نصف القطر البورى ء م ونرسم بنصف القطر ء م دائرة فيفهم بناء على ما تقدم انه فى مدة انتقال نصف القطر البورى من وضعه الابتدائى لغاية ما يمر بنقطة التماس أى لغاية انه يأخذ الوضع ء م تكون نقطة م قد لفت على هذه الدائرة مرارا معلومة زائدا القوس ء م وحينئذ يكفى إن يؤخذ البعد ء ح مساويا لطول هذه المسافة الكلية ويوصل المستقيم ح م فيكون هو المماس المطلوب ومتى علم المماس كان الحصول على العمودى فى نقطة التماس سهلا جدا لانه هو العمود المقام منها على المستقيم المماس.

تنبيه — اذا لم يراد تعيين طول قوس الدائرة اللازم أخذه على المستقيم ء ح بواسطة الطريقة الحسابية المضبوطة مراعاة للاختصار فى العمل فهناك طريقة عملية يمكن بها تعيين طول انفراد ذلك القوس

وهى انه يقسم القوس الذى يراد فرده الى جملة أقواس جزئية صغيرة جدا بحيث لا يفترق الواحد منها عن وتره فرقا محسوسا وتنقل هذه الاوتار عقب بعضها بعضا على المستقيم ء ح وفى هذه الطريقة كلما كانت الاقواس الجزئية المأخوذة صغيرة جدا كلما قرب طول الانفراد المتحصل من الحقيقة

تنبيه آخر — التناسخ [٢] يورى ان

النسبة $\frac{ط س}{م ط}$ تصغر كلما كبرت المسافة هـ
ويؤخذ من ذلك ان الزاوية س م ط شكل (١٠٩)
تصغر أيضا بحيث كلما تقدمت نقطة التماس على الحلزون
الارشميدى بالتباعد عن قطبه قرب المماس له فيها شيأ فشيأ
من ان يكون عموديا على نصف قطرها البورى

ثانيا يؤخذ من النظرية المتعلقة بتحت المماس ان المماس للمنحنى
الحلزونى فى نقطة قطبه هو نفس الوضع الابتدائى لنصف
القطر القطبى لان فى هذه النقطة المسافة هـ معدومة
اعنى ان

هـ = ٠

وبناء على ذلك يكون

و ح = ٠

ويمكن اثبات ذلك أيضا مباشرة بان يعتبر نصف قطر بورى
قريب جدا من الوضع الابتدائى فهذا النصف قطر يقطع
المنحنى فى نقطة القطب وفى نقطة ثانية قريبة جدا منه
فيعد حينئذ قاطعا من قواطع المنحنى لكن من حيث ان هذه
النقطة الثانية تتحد مع القطب عندما ينطبق نصف القطر
البورى الثانى على النصف قطر الابتدائى فيصير هذا النصف
قطر الابتدائى اذ ذاك مماسا للمنحنى فى قطبه وهو المطلوب

# الباب الثامن

## فى بعض منحنيات مختلفة كثيرة الاستعمال

# الفصل الاول

فى

# في الباسط والمبسوط ونصف قطر الانحنا

بند ١٧٤ باسط اى منحن كمحيط الدائرة ح ب ث ث شكل (١١٠)
مثلاً هو المنحنى ح خ خ خ ...... المرسوم بنقطة ح
التي تنفصل دائماً ثابتة على المماس ح ا للمنحنى حالة كون نقطة التماس
ح متغيرة على الدوام والاستمرار لكن بشرط ان البعد الكائن
بين النقطة الثابتة
ونقطة التماس يكون
دائماً مساوياً الى
المسافة التي قطعتها
نقطة التماس على المنحنى
فمثلاً اذا فرض ان
ث ح ، ث ح ... الخ
أوضاع من اوضاع
المماس يلزم ان
يكون

شكل ١١٠

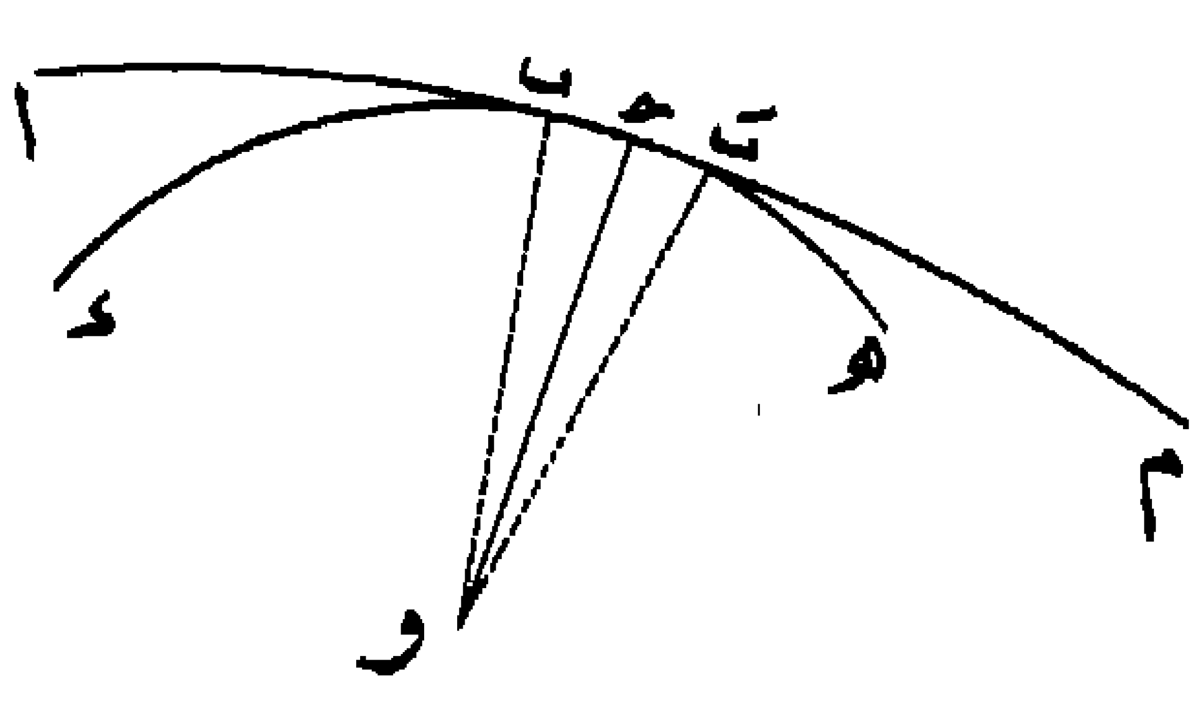
ث ح = ث ح ، ث ح = ث ح ، ث ح = ث ح ... والخ
ويقال للمنحنى ح ث ث ...... الخ المعروض هنا انه محيط دائرة
الذي يلف حوله المماس مبسوط المنحنى ح خ خ ...... الخ
الذي اطلق عليه اسم الباسط في اول البند .
اما نقطة ح التي يتقابل فيها المبسوط مع باسطه فانها تسمى بنقطة
المبدأ

بند ١٧٥ في رسم باسط محيط الدائرة نقطة فنقطة — اذا فرض
كما في شكل (١١٠) المتقدم ان نقطة ح هي نقطة
المبدأ ثم رسم من جملة نقط مختلفة مثل ث ، ث ، ث ... الخ
عدة مماسات لمحيط الدائرة وأخذ بعد ذلك على المماسات

المذكورة بالتناظر بعد ت حَ = قوس ت ح ، ث حً
= قوس ث خ ،..... والخ كانت النقط ح ، حَ ، حً ،.... الخ
المتحصلة بهذه الصورة من نقط الباسط المطلوب ومن ثم يفهم
انه يمكن الحصول على ما يلزم من النقط القريبة من بعضها بقدر ما يراد
وأنه متى جمعت هذه النقط ببعضها فالمنحنى المتحصل بهذه الصورة
يكون هو الباسط

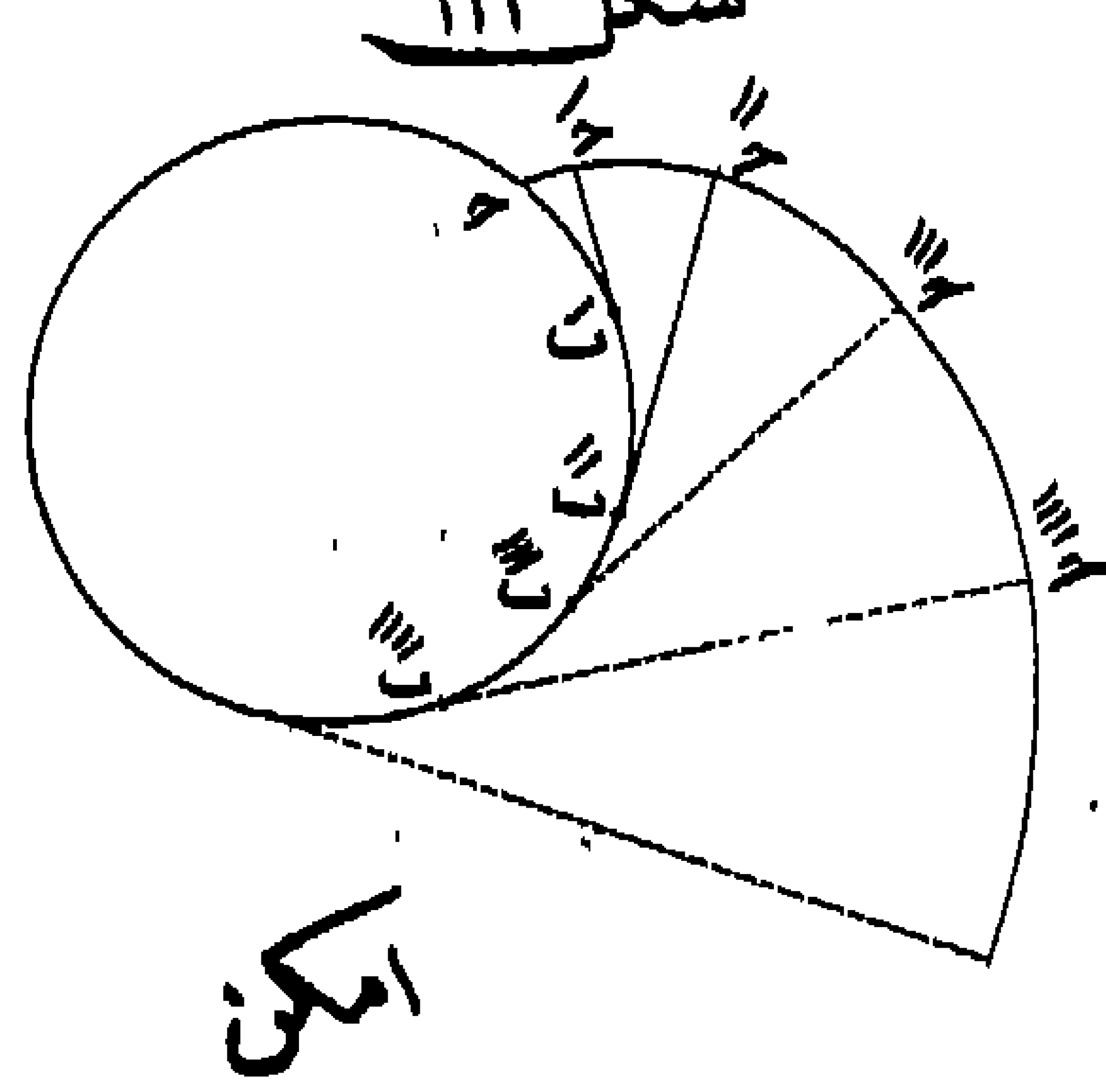
ت ١٧٦ ـ في طريقة رسم الباسط بواسطة نصف قطر الانحنا
ـ قبل الشروع في ذكر هذه الطريقة يلزمنا أولا ان نعرف ما هو
نصف قطر الانحنا فنقول

شكل ١١١



نصف قطر انحنا اى منحنى معلوم
كالمنحنى ا ح م شكل (١١١)
فى نقطة مفروضة عليه كنقطة
ح مثلا هو نصف قطر
قوس الدائرة ء ب ح ت هـ
المشترك مع المنحنى ا ح م
المعلوم في العنصرين الخطيين
ب ح ، ح ت الصغيرين جدا المجاورين للنقطة ح المعلومة
التى يبحث عن نصف قطر الانحنا فيها
ونفهم من هذا التعريف ان نصف قطر انحنا أى منحنى يختلف
من نقطة الى نقطة وان للمنحنى الواحد انصاف اقطار انحنا
كثيرة بقدر عدد نقطه

شكل ١١٢



ولنرجع الآن لشرح طريقة رسم
باسط الدائرة بواسطة نصف قطر الانحنا
فنقول
اذا اعتبرنا ان النقط ح ، ت
، ث ،.... الخ قريبة جدا
من بعضها كما فى شكل (١١٢)

امكن

أمكن اعتبار الاقواس الصغيرة ح ت ، ت ت ، ... الخ
كمستقيمات وكان ت ح = ت ح ومن ذلك يمكن اعتبار
القوس ح ح كقوس دائرة مركزها ت ونصف قطرها
ت ح وبنفس هذا السبب يمكن ان يفرض ان ت ح = ت ح
= ت ت + ت ح فيترتب على ذلك امكان اعتبار القوس
ح ح كقوس دائرة مركزه نقطة ت ونصف قطره
ت ح = ت ح وهلم جرا بحيث يمكن حينئذ اعتبار الباسط
مركبا من تتابع عدة اقواس دوائر مراكزها وانصاف اقطارها
معينة فيمكن رسمه حينئذ بالسهولة
ومن المشاهد ان طريقة الرسم بهذه الكيفية لا يمكن ان تكون
تامة الضبط بالكلية الا اذا تغير مقدار نصف قطر الانحنا
فى كل نقطة من المنحنى تغييرا مستمرا
وفى الاعمال التطبيقية مع كونه يستحيل الحصول على تغيير نصف
قطر الانحنا بطريقة مستمرة بواسطة آلات الرسم الاعتيادية
ولكن كثيرا ما تستعمل هذه الطريقة فى رسم الباسط
ولاجل زيادة الضبط فى رسم المنحنى بواسطة نصف قطر الانحنا
يؤخذ البعد الاول ح ت نصف الابعاد التالية له وهى
ت ت ، ت ت ، ... الخ ويمد القوس المرسوم
بجعل نقطة ت مركزا وبعد ت ح نصف قطر لغاية
نقطة وسط القوس ح ح التى نرمز لها بحرف ح
وكذا يمد القوس المرسوم بجعل ت مركزا من ابتدا ح لغاية
ح التى هى وسط ح ح وهلم جرا وبهذه الواسطة
يرى ان كل جزء قوسى مرسوم بنصف قطر انحنا واحد يمتد بالتساوى
فى جانبى الموضع المقابل لمقدار هذا النصف قطر
ولا يخفى انه باخذ البعد ت ت = ت ت = ..... الخ
تصنع انصاف اقطار الانحنا مع بعضها زوايا متساوية حينما
يكون المنحنى المبسوط محيط دائرة وتساوى الزوايا هذا هو فى

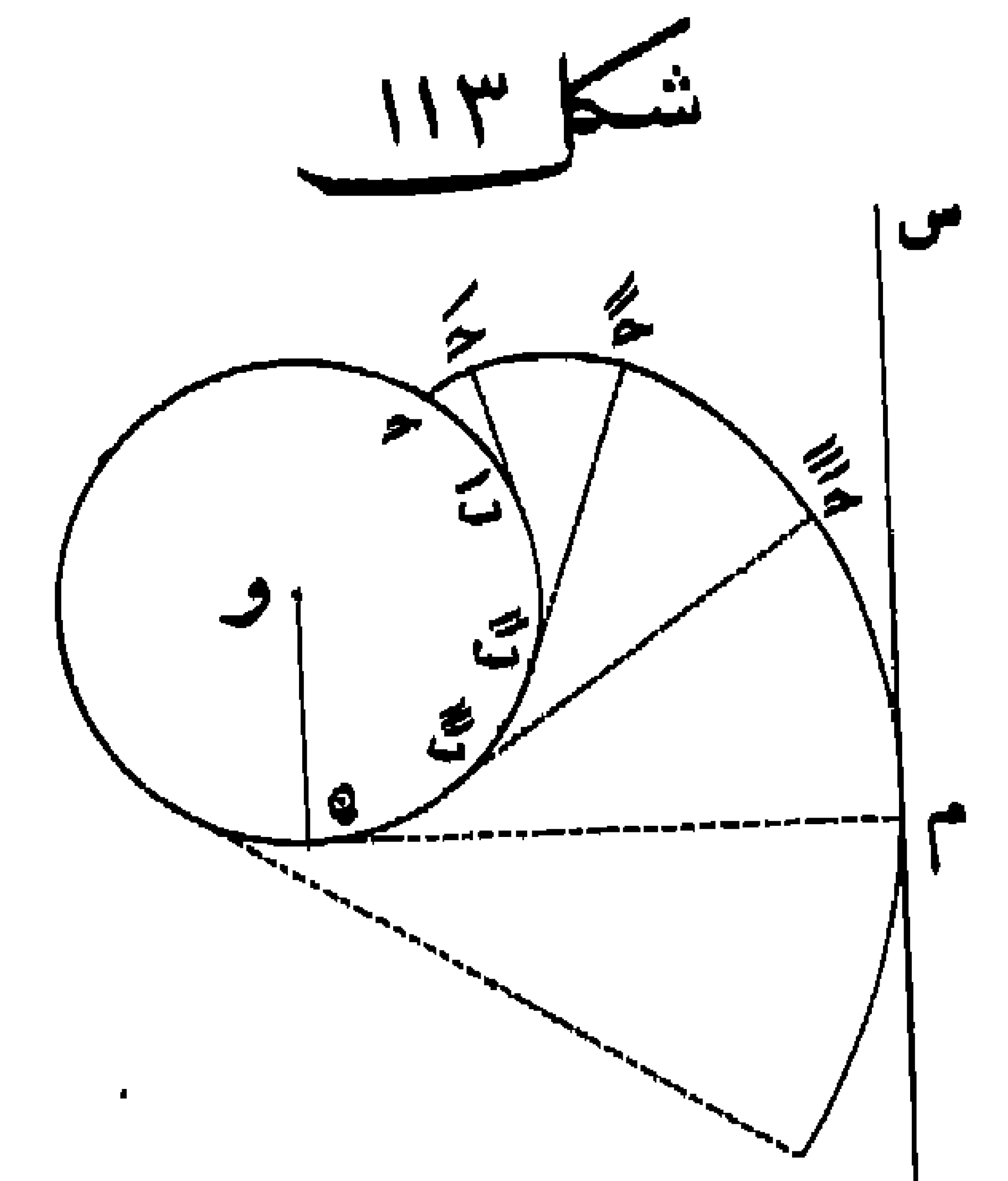
العادة الوضع الموافق ما لم ينبنى على اشتراط عدم حصول التساوى بين ت ت ، ت ت ، . . . . الخ كما يتأتى ذلك فى حالة ما لم يكن المبسوط محيط دائرة

س ١٧٧ فى رسم الباسط بالحركة المستمرة — لنفرض ان فتلة من الخيط ملفوفة على المنحنى ح ت شكل (١١٢) المتقدم وانه موضوع فى الطرف ح من هذه الفتلة قلم رصاص أو خلافه مما يستعمل للرسم فاذا حلت الفتلة الملفوفة تدريجيا مع شدها دائما بواسطة قلم رصاص أو اى قلم اخر موضوعا فى نقطة ح فلا شك ان هذا القلم يرسم المنحنى الباسط للمنحنى الذى كانت الفتلة ملفوفة عليه قبل حلها وهو الذى يسمى اذ ذاك بالمنحنى المبسوط او بالمبسوط فقط

ومن المشاهد ان اى نقطة أخرى من نقط الفتلة ترسم عند حلها باسطا ثانيا متساوى البعد من جميع الجهات عن الباسط الاول بل ويكون مساويا له فى حالة ما يكون المبسوط محيط دائرة

س ١٧٨ رسم العمودى على الباسط والمماس له — اذا رسم من اى نقطة كنقطة ح شكل (١١٢) مثلا مستقيم م ح مماس للمبسوط كان بالضرورة هذا المماس عموديا على الباسط فى نقطة تقابله به وهى نقطة م وحينئذ اذا أقيم من تلك النقطة عمود مثل م س على م ح كان هذا العمود مماسا للباسط وهو المطلوب

شكل ١١٣




ومن ذلك يرى ان كل مماس المبسوط هو عمودى على الباسط والعكس

والعكس للعكس وأن المماس م س للباسط والعمودى
ء و على المبسوط المرسومين من نهايتى نصف قطر المنحنا واحد
يكونان متوازيين

بند ١٧٩ ايجاد المبسوط من بعد معلومية الباسط — اذا
علم منحن مثل ح م كما فى شكل (١١٢) المتقدم وكان
المطلوب ايجاد مبسوط هذا المنحنى يؤخذ على المنحنى ح م المعلوم
عدة نقط متتابعة مثل ح ، ح َ ، حً ، ..... الخ ويقام
من تلك النقط العموديات ح ت ، حَ تَ ، حً تً ، .. الخ
وبما ان هذه العموديا تكون بناء على ما تقدم فى بند (١٧٨)
مماسة للباسط المطلوب فنرسم حينئذ داخل المضلع الذى
يتكون من تقاطعات هذه العموديات منحنيا مماسا لاضلاعه
فيكون ذلك المنحنى بالضرورة عبارة عن مبسوط الباسط ح م
المعلوم وهو المطلوب

# الفصل الثانى

## فى المنحنى السيكلويدى

بند ١٨٠ اذا فرضنا ان دائرة تتدحرج على مستقيم بشرط
أن تمس هذا المستقيم دائما فى نقط محيطها على التوالى فكل
نقطة من محيطها ترسم فى اثناء المدة التى تمضى ما بين كل
تماسين متتاليين لهذه الدائرة بالمستقيم فى النقطة المفروضة
منحنيا يسمى بالمنحنى السيكلويدى

مثلا اذا تدحرجت الدائرة التى مركزها و
شكل (١١٤) على مستقيم مثل ا اَ وكانت مماسة
له اولا فى نقطة ا من محيطها فانه عندما تبتدئ الدائرة

في التدحرج ترتفع نقطة ا شيأ فشيأ لحد مخصوص ثم تهبط تدريجيا الى ان تمس المستقيم ا اَ في نقطة ثانية مثل اَ وفي مدة هذه الدورة الكاملة تكون نقطة ا المتحركة رسمت في مستوى الدائرة المتدحرجة منحنيا كالمنحنى ا ب اَ هو المنحنى المعروف بالسيكلويد

س ١٨١ د والمستقيم ا اَ المحصور ما بين تماسين متتاليين مثل ا , اَ لنقطة واحدة مثل ا يسمى قاعدة السيكلويد ا ب اَ المرسوم بنقطة ا وهذه القاعدة تساوي لمحيط الدائرة الراسمة بحيث لو رمزنا بحرف ق لقطر هذه الدائرة تكون القاعدة ا اَ = ط ق

والعمود ب ٤ المار بوسط القاعدة هو محور السيكلويد وهو يساوي الى القطر ق وبناء عليه يكون

$$\frac{ا اَ}{ب ٤} = \frac{ط ق}{ق} = ط = ٣,١٤١٦ = \frac{٢٢}{٧} \text{ تقريبا}$$

ومنه يكون

$$ا اَ = ٣,١٤١٦ \times ق = \frac{٢٢}{٧} ق \quad , \quad ق = \frac{ا اَ}{٣,١٤١٦} = \frac{٧}{٢٢} ا اَ$$

س ١٨٢ د رسم السيكلويد نقطة فنقطة — اذا اريد رسم المنحنى السيكلويدي المتولد من تحرك نقطة ا الكائنة على محيط دائرة قطرها ق كما في شكل (١١٤) يرسم اولا مستقيم مثل ا اَ مساو لقاعدة السيكلويد المقدرة بحاصل ضرب ٣,١٤١٦ × ق ثم ترسم الدائرة و بالقطر ق بحيث تكون مماسة للمستقيم ا اَ في نقطة ا ثم تقسم كلا من القاعدة ا اَ ومحيط الدائرة الراسمة الى اقسام متساوية عددها واحد كثمانية اقسام مثلا وتنمر بنمر كالمبينة في الشكل ثم يرسم من نقط تقاسيم

الدائرة

الدائرة مستقيمات موازية للقاعدة ا آ وبعد ذلك يرسم من نقط تقاسيم القاعدة وهي ا ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .......... الخ مستقيمات موازية للمستقيمات ا آ ، ٢ آ ، ٣ آ ، ..... الخ

شكل ١١٤

الواصلة من نقطة ا الى نقط تقاسيم الدائرة و فهذه الموازيات تتقاطع مع موازيات القاعدة ا آ في نقط مثل آ ، ٢ ، ٣ ، ....... الخ تكون هي نقط من السيكلويد لاننا اذا اعتبرنا أي واحدة من هذه النقط كنقطة ٢ مثلا نجد انه حينما تصير نقطة التماس في نقطة ا من القاعدة يصير القطر ا ٤ رأسيا وتصير النقطة الراسمة ا شاغلة بالنسبة لهذا القطر وضعا كوضع نقطة آ بالنسبة للقطر ا ٤ كما في الشكل وحيث ان الوضع الذى يكون بهذه الصورة ليس هو الا نقطة آ فتكون حينئذ هذه النقطة من نقط السيكلويد

وبمثل ذلك يبرهن على ان النقط آ ، ٢ ، ٣ ، .... الخ من السيكلويد وحيث انه يمكن تقسيم القاعدة ا آ الى اقسام متساوية عددها حيثما اتفق فيمكن بناء على ذلك تعيين النقط الكافية بقدر ما يراد من السيكلويد فاذا جمعت هذه النقط بخط متصل تحصل المنحنى السيكلويدى

فاذا فرضنا ان المعلوم القاعدة ا آ للسيكلويد بدل

ان كان المعلوم قطر الدائرة الراسمة وهو ده أمكن دائما
تعيين القطر المذكور هكذا

ده = آآ / ٣،١٤١٦ = ٧ / ٢٢ اآ تقريبا

وبعد تعيين القطر ده نجري العمل كما في الحالة المتقدمة
وفي اثناء حركة الدائرة وا ترسم نقطة ا السكلويد
اب آ والمركز و يرسم المستقيم و ٢ الموازي
للقاعدة اآ وكل نقطة من التي بين و ، ا ترسم
سيكلويدا قصيرا اما كل نقطة موضوعة على استقامة
و ا فانها ترسم سيكلويدا مستطيلا وليس في رسم
هذه السيكلويدات قصيرة كانت او طويلة ادنى صعوبة

سـ ١٨٣ د رسم السيكلويد بالاستمرار — اذا عملت
الدائرة و على هيئة قرص مستدير وثبت على محيطها
سن مدبب او قمة القلم الرصاص في نقطة ا كما في
شكل (١١٤) ثم دحرج هذا القرص بطول مسطرة
مطبق حرفها على اآ لكن بدون حصول ادنى انزلاق
من الدائرة على حرف المسطرة فان القلم الرصاص او السن
المثبت في نقطة ا يرسم السكلويد بحركة مستمرة

سـ ١٨٤ د رسم العمودي على السيكلويد ثم المماس له
— متى شغلت النقطة الراسمة للسيكلويد وهي ا وضعا
حيثما اتفق كالوضع عَ مثلا شكل (١١٤) المتقدم صارت
نقطة التماس هي ع وحينئذ فيمكن اعتبار العنصر
الخطي عَ من السيكلويد كانه منطبق ومتحد مع عنصر
قوس الدائرة التي مركزها نقطة ع ونصف قطرها ع عَ
وبناء على ذلك يكون المستقيم ع عَ العمودي على قوس
تلك الدائرة عموديا ايضا على منحنى السيكلويد

ويكون

ويكون حينئذ العمود ع ح المقام على نهاية ع ع مماسا للسيكلويد

شكل ١١٥

ويستنتج من ذلك طريقة لرسم العمودى والمماس للمنحنى السيكلويدى فى نقطة مثل نقطة م شكل (١١٥) مفروضة عليه او على قوس منه ولذلك يكفى ان نعين نقطة تماس الدائرة الراسمة بالقاعدة حينما تمر تلك الدائرة بنقطة م وحيث انه اذا رسم المستقيم هـ هَ موازيا للقاعدة ا اَ للمنحنى السيكلويدى المعلوم ومرتفعا عنها بقدر نصف القطر د للدائرة الراسمة كانت جميع الاوضاع التى يشغلها مركز هذه الدائرة فى اثناء الحركة موجودة كلها على هذا المستقيم الموازى وكذا بما انه عندما تصير النقطة الراسمة ا فى الوضع م يكون مركز الدائرة متباعدا عن نقطة م بقدر $\frac{1}{2}$ د فحينئذ اذا رسم قوس دائرة بجعل نقطة م مركزا وبعد مساو الى $\frac{1}{2}$ د نصف قطر فانه يقطع الموازى هـ هَ فى نقطة مثل و تكون هى المركز المطلوب فلو انزلنا منها العمود وع على ا اَ لكانت نقطة ع هى نقطة التماس وعلى ذلك فسواء رسمت الدائرة الراسمة اولم ترسم يكون المستقيم م ع هو العمودى على السيكلويد فى نقطة م والعمودى المقام على م ع وهو م ح هو المماس له فيها

# الفصل الثالث

# فى المنحنى الايپيسيكلويدى

سند ١٨٥ اذا فرضنا ان الدائرة و شكل (١١٦) الراسمة تتدحرج على محيط دائرة كالدائرة ح بدل ان كانت تتدحرج على مستقيم كما فى سند ١٨٠ فان كل نقطة من محيطها كنقطة ا مثلا ترسم فى المدة التى تمضى ما بين كل تماسين متتاليين مثل ٢ ، ٢َ منحنيا مثل ا ب اَ يسمى المنحنى الايپيسيكلويدى او الايپيسيكلويد فقط وحينما تدور الدائرة و داخل الدائرة ح فان كل نقطة من محيطها ترسم ايضا أيپيسيكلويدا لكنه يكون داخليا ويمكن ان يطبق عليه جميع ما سيذكر بخصوص الايپيسيكلويد الخارجى

سند ١٨٦ والقوس ا اَ من الدائرة ح المنحصر بين التماسين ا ، اَ المتتاليين لنقطة ا الابتدائية هو ما يسمى بقاعدة الايپيسيكلويد وهذه القاعدة تساوى محيط الدائرة الراسمة و الذى يقدر بالكمية ط ق اعنى بحاصل ضرب النسبة التقريبية ط فى قطرها ق

والمستقيم ح ب الواصل من المركز ح الى وسط هذه القاعدة هو محور الايپيسيكلويد ويكون البعد ب ٤ = ق

وعلى ذلك وكما تقدم فى السيكلويد المندرج فى سند ١٨١ نجد هنا ان

$$\frac{\text{ا اَ}}{\text{ب ٤}} = \frac{\text{ط ق}}{\text{ق}} = \text{ط} = ٣{,}١٤١٦ = \frac{٢٢}{٧} \text{ تقريبا}$$

ومنه

ومنه يحدث

$$\text{اأ} = ٣ر١٤١٦ \times \text{ه} = \frac{٢٢}{٧}\,\text{ه} \;،\; \text{ه} = \frac{\text{اأ}}{٣ر١٤١٦} = \frac{٧}{٢٢}\,\text{اأ}$$

ونقطة ب التي يتقابل فيها المحور مع المنحني هي ما تسمى برأس
ذلك المنحني

بند ١٨٧ رسم الايبيسيكلويد نقطة فنقطة
طريقة رسم هذا المنحني نقطة فنقطة تشابه بالكلية
لطريقة رسم السيكلويد المذكورة في بند ١٨٢ وهي أن
تؤخذ أولا القاعدة اأ = ٣ر١٤١٦ × ه ويرسم
محيط الدائرة و بالقطر ه المعلوم بحيث يكون
مماسا للدائرة حـ في نقطة ا ثم يقسم كل من القاعدة
اأ ومحيط الدائرة و الى عدد واحد من الاقسام
المتساوية كثمانية اقسام مثلا وتنمر بالنمر الموضحة في
شكل (١١٦)

ثم تجعل نقطة حـ
مركزا وترسم جملة
دوائر متحدة المركز
مع الدائرة حـ بانصاف
أقطار تساوي
للابعاد الواصلة من
نقطة حـ الى نقط
تقاسيم محيط الدائرة
و وبعد ذلك تجعل
نقط تقاسيم القاعدة
اأ وهي ١ ، ٢ ، ٣ ، ........ الخ
مراكزا وترسم اقواس بانصاف اقطار متساوية

شكل ١١٦

على التناظر لابعاد نقطة ا عن نقط اَ ر ٢ ر ٤
ر . . . . . الخ التى هى تقاسيم الدائرة الراسمة و
فتقطع الدوائر الموازية الى القاعدة ا اَ فى نقط تكون
هى من نقط المنحنى الايپيسيكلويدى ويمكن بواسطة
براهين مشابهة للبراهين المتقدمة فى بند ١٨٢ ان نثبت
على أن اى نقطة من تلاث النقط كنقطة ٤ مثلا هى
من الايپيسيكلويد وانه يمكن تعيين النقط الكافية
لرسم ذلك المنحنى ثم تجميعها بخط فيكون هو المنحنى المطلوب
فاذا فرض ان المعلوم هو القاعدة اا لا القطر ه
أمكن تعيين هذا القطر هكذا

$$ه = \frac{اَ ا}{٣,١٤١٦} = \frac{٧}{٢٢} اا$$

وبعد ذلك يجرى العمل كما فى الحالة السابقة حيث القطر
ه معلوما
كل نقطة موضوعة بين نقطتى و ، ا ترسم ايپيسيكلويدا
قصيرا وكل نقطة موضوعة على استقامة البعد و ا
المذكور ترسم ايپيسيكلويدا مستطيلا وذلك
كما تقدم فى بند ١٨٣

بند ١٨٨ رسم الايپيسيكلويد بالاستمرار

اذا فرض ان ح ، و شكل (١١٦) قرصان مستديران
وان ا سن القلم الرصاص المثبت فى محيط الدائرة و
فمن الواضح انه اذا ادير القرص و على محيط القرص ح
بدون انزلاق عليه لرسم سن القلم الرصاص المنحنى
الايپيسيكلويدى ا ب اَ بحركة مستمرة وهو
المطلوب

بند ١٨٩ ــ رسم العمودى على الايپيسيكلويد

والمماس له ـــــ يمكن بمقتضى براهين كالبراهين التى ذكرت فى سند ١٨٤ الاثبات على ان المستقيم ء ءَ شكل (١١٦) الواصل بين نقطة اختيارية مثل ءَ من الايبيسيكلويد الى نقطة التماس ء للدائرة الراسمة المقابلة لنقطة ءَ هو العمود على الايبيسيكلويد فى نقطة ءَ المذكورة وان العمود ءَ ح المقام على نهاية ء ءَ هو المماس للايبيسيكلويد ومن ذلك تنتج ايضا طريقة لرسم العمودى والمماس للايبيسيكلويد فى نقطة مثل م شكل (١١٧) ويكفى فى ذلك ان تعين نقطة التماس المقابلة لنقطة م

شكل ١١٧



وحيث اننا لو رسمنا قوس دائرة مثل ه هَ موازيا الى ا اَ ومتباعدا عنه ببعد يساوى لنصف القطر و ه للدائرة و الراسمة لكان القوس ه هَ مشتملا على جميع الاوضاع التى يأخذ مركز هذه الدائرة اثناء حركتها وكذا من حيث انه عند وجود النقطة الراسمة ٢ فى نقطة م يكون مركز الدائرة الراسمة متباعدا عن نقطة م ببعد يساوى $\frac{1}{2}$ و ه حينئذ لو رسمنا قوس دائرة بجعل نقطة م مركزا وبعد $\frac{1}{2}$ و ه نصف قطر لقطع ه هَ فى نقطة و التى هى المركز المطلوب فاذا وصل بين المركزين

و ر ح بمستقيم تحصلت نقطة التماس وهى ء
وحينئذ فسواء رسمت الدائرة و اولم ترسم تكون
المستقيم م ء ى هو العمودى المطلوب
فاذا اقمنا المستقيم م ح عموديا عليه كان هو
المماس للمنحنى الايپيسيكلويدى فى نقطة م وهو
المطلوب

وكان تمام طبع هذا الكتاب بعون
الملك الوهاب فى غرة صفر سنة ١٢٥٠
بعد الهجرة النبوية على صاحبها
أفضل الصلاة
وازكى
التحية
م

